

Université Toulouse III - Paul Sabatier
UFR Mathématiques-Gestion-Informatique

THESE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paul Sabatier
Mention Mathématiques Fondamentales et
Applications

présentée et soutenue par

Séguy Mathias

Le 23 Mai 2003

Titre de la Thèse

Cobordisme et reliabilité équisingulière de
singularités marquées de feuilletages
holomorphes en dimension deux.

JURY

M. CERVEAU D.
M. MATTEI J.F.
M. NICOLAU M.
M. ROCHE C.
M. NGUYEN T.Z

Rapporteur.
Directeur.
Rapporteur.
Examineur.
Examineur.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Jean François Mattei. Il est, depuis ces cinq dernières années, celui qui éclaire et conseille. Il a su guider mes pas tout au long de cette période sans jamais désespérer. Le monde mathématique qu'il m'a fait découvrir fut pour moi merveilleux. J'ai pris un immense plaisir à évoluer au milieu de ces arbres et de ces feuilles. Je le remercie pour ces années.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Marcel Nicolau et à Dominique Cerveau qui ont accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie d'autant pour les conseils qu'ils m'ont prodigués. Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Marcel Nicolau pour ces mails et son acharnement dans la traque de mes erreurs. Qu'ils trouvent, dans ces quelques lignes, toute ma reconnaissance.

Je remercie Claude Roche et Tien Zung Nguyen d'avoir accepté de participer à mon jury et de me faire l'honneur de leur présence.

Emmanuel Paul et Franck Loray ont toujours témoigné de l'intérêt pour mes recherches. Ils m'ont toujours prêté une oreille amicale et chaleureuse, tant mathématiquement qu'humainement. Je les en remercie ici.

Je remercie chaleureusement Jeannette Fournet pour les multiples lectures de cet ouvrage et les corrections qui s'en suivirent. Elle reçoit ici toute la sympathie et le respect que je lui dois.

Que mes parents qui m'ont aimé et soutenu tout au long de ma vie se rassurent, je crois que mes études se finissent enfin. Je ne peux qu'être fier d'eux de m'avoir "mené" jusque là et ce ne fut pas une mince épreuve. Que ces quelques lignes leur rendent l'hommage qu'il leur est dû.

J'embrasse ma chérie. Sans toi, je n'aurai eu la force de mener tout ça au bout, et puis sans toi... je n'aurai pas de princesse dans ma vie. Je t'aime ma douce.

Une pensée particulière pour ceux qui partagèrent le labeur quotidien de ces années, qui connurent le "goulag", le "frigo" ou furent "expatriés" en U4. Pour cette petite famille qui fut la notre et qui se disperse aux quatre vents. A Magali, Christophe, Vincent, Benoît et Eric pour les bons et les mauvais moments que nous avons partagés au cours de ces années. Je n'oublierai pas Mathieu dans cette liste et je le remercie d'avoir été présent quand ce fut nécessaire. Il y a des aides que l'on n'oublie pas, "merci Mathieu". Je salue aussi Emmanuel, Guy et Julien pour leur chaleur et leur dynamisme.

Une pensée affectueuse à celles qui, avec le sourire, m'ont aidé (et renseigné) administrativement. Je remercie Yveline Panabière, Marie Brouard et Agnès Requis pour leur gentillesse.

Enfin, je remercie mes sponsors : mes parents, Didier Lallement et le ministère, sans qui cette Thèse n'aurait jamais vu le jour.

Table des matières

Introduction	9
Des feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers.	9
Des singularités marquées (Chapitre 1).	12
De l'application (Chapitre 4).	14
De la démonstration du Théorème A (Chapitre 2).	16
De la démonstration du Théorème B (Chapitre 3).	18
De l'avenir	22
0 Germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ (et associés).	25
0.1 Généralités sur les feuilletages	25
0.2 Réduction des singularités de germes de feuilletages de \mathbb{C}^2 singulier en 0.	26
0.2.1 Singularités réduites.	26
0.2.2 Arbre de réduction	26
0.2.3 Holonomie	29
0.3 Déformation de feuilletages	29
0.3.1 Déformation dont l'espace des paramètres est du type $(\mathbb{C}^p, 0)$	29
0.3.2 Déformation dont l'espace des paramètres est du type $(\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un compact de \mathbb{C}^p	32
0.4 Déploiement de feuilletages	34
0.4.1 Déploiement dont l'espace des paramètres est du type $(\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un compact de \mathbb{C}^p	34
1 Singularités marquées et Résultats principaux.	39
1.1 Notion de prémarquage d'un feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine	39
1.2 Notion de marquage d'un feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine	42
1.2.1 Système complet simple de lacets	42
1.2.2 Feuilletages marqués	43
1.3 SL-équivalence, SL-reliabilité, SL-coborbisme entre deux feuilletages	44
1.4 Homéomorphismes de \mathbb{P}^1 et feuilletages marqués	46
1.5 Feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2 ^o espèce.	48
1.6 Énoncés des Théorèmes Principaux	49
2 Démonstration du Théorème A.	51
2.1 Un pont au milieu de nulle part...	51
2.1.1 Première étape : Construction de l'espace D_P^a et de l'application φ_P	53
2.1.2 Deuxième étape : Construction de la variété \mathcal{M}_P^a	55
2.1.3 Quelques propriétés du pont (\mathcal{M}_P^a, D_P^a)	57
2.2 Définition d'une nouvelle structure holomorphe sur le germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$	60

2.2.1	Quelques propriétés de l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ muni de sa nouvelle structure holomorphe.	62
2.3	Conclusion	63
2.3.1	Fin de la démonstration du Théorème A.	66
3	Démonstration du Théorème B.	69
3.1	Digression nécessaire sur les germes d'automorphisme d'un germe de feuilletage	69
3.1.1	Définitions	69
3.1.2	Classe d'isotopie de germes d'automorphisme de $Fix(\mathcal{F}_{\omega_0})$ et de $Aut_0(\mathcal{F}_{\omega_0})$ pour un feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} de 2 ^o espèce générale.	70
3.2	Quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$	76
3.2.1	Définitions de quasi-cocycles du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$	76
3.2.2	Existence d'un quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$	78
3.3	Construction de la faible SL-reliabilité des feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$	84
3.3.1	Récapitulatif de la situation et notations	84
3.3.2	Construction d'une déformation au voisinage de chaque composante irréductible du diviseur D_{ω_0}	85
3.3.3	Preuve du lemme clé B1	88
3.4	Démonstration rapide du Théorème B.	92
4	Applications aux singularités simples.	93
4.1	Définition de feuilletage pré-simple.	93
4.2	Etude de la SL-équivalence pour les feuilletages pré-simples.	97
4.3	Résultats sur les feuilletages pré-simples.	102
4.4	Application aux singularités nilpotentes.	103
5	Appendice	107
5.1	Morphismes et automorphismes de chapelets de sphères.	107
5.1.1	Morphismes entre chapelets de sphères.	108
5.1.2	Automorphismes de chapelets de sphères.	111
5.2	Germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$	114
6	Bibliographie	117
		119

Table des figures

1	Arbre de résolution du double cusp pondéré par auto-intersection des composantes.	41
2	Exemple de système complet simple sur la composante D	43
3	Exemple d'arbre dual (non pondéré) réalisant les conditions de la remarque 1.5.3.	50
4	(Lemme 2.1.4) Armature d'un pont reliant deux feuilletages.	53
5	(Preuve du lemme 2.1.4) Schéma de construction de l'armature D_P^a par recollements.	54
6	(Lemme 2.1.2) Schéma d'un pont reliant deux feuilletages.	55
7	(Lemme 3.1.5) Représentation graphique de l'application $\phi_{f(x,y)}^X$	72
8	(Lemme 3.1.8 et lemme 3.1.9) Représentation de l'isotopie ϕ_t^Z	74
9	(Preuve du lemme 3.2.2) Méthode de relevé des chemins	81
10	Preuve de la proposition 3.2.2 : Extensions locales associées.	83
11	(Preuve du lemme 3.3.1) Construction de la variété (\mathcal{M}_j, D_j) par recollements.	86
12	(Preuve du lemme 3.3.1) Construction de l'application F_j	87
13	(Preuve du Lemme Clé B1) Construction de la variété (\mathcal{M}, D) par recollement des variétés (\mathcal{M}_j, D_j)	88
14	Polynôme de type $A_{2n} : x^{2n+1} + y^2, n \geq 1$	94
15	Polynôme de type $A_{2n-1} : x^{2n} + y^2, n \geq 1$	94
16	Polynôme de type $D_{2n} : x^{2n-1} + y^2x, n \geq 2$	95
17	Polynôme de type $D_{2n+1} : x^{2n} + y^2x, n \geq 2$	95
18	Polynôme de type $E_6 : y^3 + x^4$	96
19	Polynôme de type $E_7 : y^3 + yx^3$	96
20	Polynôme de type $E_8 : y^3 + x^5$	97
21	Le feuilletage est de type A_{2n}, E_6, E_8	98
22	Lorsque le feuilletage est de type A_{2n-1}	100
23	Lorsque le feuilletage est de type D, E_7	100
24	Représentation du domaine Ω	114

...

Introduction

Des feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers à l'origine.

Nous nous intéressons aux germes de feuilletages holomorphes singuliers \mathcal{F}_ω de $(\mathbb{C}^2, 0)$ définis par un germe de 1-forme holomorphe ω possédant un zéro isolé à l'origine. Parmi ceux-ci nous ne considérons que les feuilletages non dicritiques. Parmi les problématiques naturelles associées à l'étude de tels objets nous distinguons les suivantes :

1. Quels sont les espaces des modules ainsi que leurs structures (topologique, analytique, formelle,...), comment ces espaces varient par déformation ?
2. Etant donnée une liste d'objets caractéristiques (invariants analytiques, topologiques, formels...), existe-t-il un feuilletage qui les réalise ? Est-il unique ?

Rappelons que de tels feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont analytiquement, resp. topologiquement, resp. formellement conjugués s'il existe un difféomorphisme analytique, resp. topologique, resp. formel Φ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $\Phi^*(\mathcal{F}_{\omega_0}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ (i.e. le pull-back d'une 1-forme ω_0 qui caractérise le feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} par le difféomorphisme Φ est une 1-forme ω_1 qui définit le feuilletage \mathcal{F}_{ω_1}).

On connaît les réponses à ces questions pour les singularités réduites (Brunjo, Dulac, Ecalle, Malgrange, Martinet, Poincaré, Ramis, Siegel, Voromin, Yoccoz,...) ainsi que pour les singularités nilpotentes (Berthier, Cerveau, Meziani, Moussu, Sad,...). Mais pour les autres singularités, ces problèmes restent entiers, même "génériquement".

Un résultat essentiel dans l'étude des feuilletages est l'unicité de la désingularisation par éclatements (Seidenberg [Sei], Mattei, Moussu [Mat-Mou]) qui permet d'associer à une singularité de feuilletage une unique variété de dimension 2, germifiée le long d'un diviseur, feuilletée par un feuilletage ne possédant que des singularités réduites. Bien que cet outil "simplifie" le problème, il ne le résout pas pour autant.

On aborde différemment la question. Au lieu de considérer tous les feuilletages, on étudie les germes de déformation d'un feuilletage \mathcal{F} donné, pour les relations d'équivalence correspondantes à la conjugaison formelle, resp. analytique, resp. topologique des germes de déformation. Cette démarche revient intuitivement, à ne s'intéresser qu'aux feuilletages proches de \mathcal{F} . On dit qu'un objet qui reste constant tout au long de tout germe de déformation topologiquement, resp. formellement, resp. analytiquement, trivial du feuilletage est un f-invariant (f pour famille) topologique, resp. formel, resp. analytique du feuilletage. On remarque que génériquement tout germe de déformation formellement, resp. analytiquement, trivial se désingularise en famille. Les candidats géométriques à être des f-invariants topologiques sont :

1. L'arbre dual du diviseur de la réduction du feuilletage, pondéré par auto-intersection et multiplicité. Il résume le type topologique de la variété obtenue après réduction du feuilletage.
2. La liste des classes analytiques des points singuliers du feuilletage réduit, chacune pondérée par la "position" des séparatrices locales relativement aux branches locales du diviseur.

3. La liste des classes analytiques des groupes d'holonomie associés à chaque composante irréductible du diviseur. Elle décrit le comportement transverse des feuilles du feuilletage désingularisé au voisinage du diviseur.

On sait que pour une large classe de feuilletage (feuilletage de 2° espèce), l'arbre de résolution associé à la désingularisation du feuilletage coïncide avec celui associé à la réduction de ses séparatrices ([Mat-Sal₃] et [Mat-Sal₂]). Pour les feuilletages appelés par Camacho, Neto, Sad [Cam-Net-Sad] courbes généralisées¹, non dicritiques, la donnée de l'arbre de réduction correspond à la donnée topologique de l'union des séparatrices.

Génériquement, le groupe d'holonomie, associé à chaque composante qui porte au moins trois singularités, est rigide [Cer-Mou] pour la rigidité formelle/-analytique dans le sens suivant : Toute conjugaison topologique, resp. formelle, de tels groupes est automatiquement holomorphe.

Il reste à comprendre comment interagissent ces 3 f-invariants entre eux et s'ils sont les seuls.

Nous dirons qu'une déformation, resp. un déploiement, est SL-équisingulière si elle se désingularise en famille et si chacune de ses fibres possède les mêmes f-invariants.

J.F. Mattei et E. Salem ont étudié ce problème dans le cadre de petites déformations (i.e. de germes de déformations). Génériquement, ils ont résolu la problématique liée à la recherche des f-invariants dans le cadre topologique [Mat₁], analytique [Mat-Sal₁] et formel [Mat-Sal₁]. Ils donnent aussi la dimension ainsi que la construction de l'espace universel des feuilletages pour chacune de ces trois équivalences (lorsque ces espaces sont de dimension finie) :

Théorème I² [Mat-Sal₁] *Soit ω une 1-forme quasi-hyperbolique³, non dégénérée. Il existe une déformation $\bar{\omega}$ de ω d'espace des paramètres*

$$Q \simeq (\mathbb{C}^{\tau(\omega)+\delta(\omega)}, 0)$$

qui est universelle SL-équisingulière dans le sens suivant :

- *Pour chaque déformation SL-équisingulière η d'espace de paramètre $(\mathbb{C}^p, 0)$, il existe un germe d'application analytique $\lambda : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow Q$ et une famille analytique $(\Phi_t)_{t \in (\mathbb{C}^p, 0)}$ de germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui, pour tout t suffisamment petit, conjugue les feuilletages sur $(\mathbb{C}^2 \times \{t\}, (0, t))$ donnés par η_t et par $\bar{\omega}_{\lambda(t)}$. De plus, la factorisation λ est unique.*

Théorème II⁴ [Mat-Sal₁] *Une déformation d'une 1-forme quasi-hyperbolique générique est topologiquement triviale si, et seulement si, elle est induite par un déploiement équisingulier.*

¹Un germe de feuilletage singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, non dicritique, est appelé *courbe généralisée* si son feuilletage réduit ne possède pas de singularité de type noeud-col.

²Cf. [Mat-Sal₁] p. 137 Theorem A.

³Une 1-forme ω est quasi-hyperbolique si le diviseur D_ω (associé à la désingularisation du feuilletage) est un $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ -invariant et si tous les points singuliers réduits portés par le diviseur sont de type selle.

⁴Cf. [Mat-Sal₁] p. 137 Theorem B.

Théorème III ⁵ [Mat-Sal₁] *Soit ω une 1-forme quasi-hyperbolique générique. Il existe une déformation SL-équisingulière $\bar{\omega}'$ de ω d'espace des paramètres $T \simeq (\mathbb{C}^{\tau(\omega)}, 0)$, qui est top-universelle SL-équisingulière dans le sens suivant :*

- *Pour chaque déformation SL-équisingulière η d'espace de paramètre $(\mathbb{C}^p, 0)$, il existe un germe d'application analytique $\mu : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow T$ et une famille analytique $(\Phi_t)_{t \in (\mathbb{C}^p, 0)}$ de germes d'homéomorphismes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui, pour tout t suffisamment petit, conjugue les feuilletages sur $(\mathbb{C}^2 \times \{t\}, (0, t))$ donnés par η_t et par $\bar{\omega}'_{\lambda(t)}$. De plus, la factorisation μ est unique et $\bar{\omega}'$ est unique à conjugaison analytique près.*

Une définition des entiers τ et δ est donnée dans [Mat-Sal₁]. Nous rappelons ici :

$$\delta(\omega) = \sum_c \frac{(v_c - 1)(v_c - 2)}{2} \in \mathbb{N}$$

où c décrit l'ensemble de tous les points singuliers (0 inclus) qui apparaissent dans la réduction de \mathcal{F}_ω et v_c est la multiplicité algébrique du feuilletage au point c , et

$$\tau(\omega) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}) \in \mathbb{N} \cup \infty$$

où \mathcal{U} est un recouvrement adapté du diviseur exceptionnel D_ω et $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$ est le faisceau quotient donné par la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{X}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \rightarrow \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \rightarrow 0$$

avec $\mathcal{X}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$ le faisceau de base D_ω des champs tangents à $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ et $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$ le faisceau de base D_ω des champs basiques de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ (leur flot laisse $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ invariant). Nous appelons type modulaire analytique du feuilletage "l'entier" $\tau + \delta \in \mathbb{N} \cup \infty$ (toujours sous l'hypothèse de quasi-généricité). Lorsque cet entier est nul, tout germe de déformation SL-équisingulière est analytiquement trivial. Ces théorèmes donnent tout son sens à la notion de déformation SL-équisingulière puisque cela signifie fixer une partie de la topologie du feuilletage.

On se pose alors un problème complémentaire : Ces trois f-invariants (définis au-dessus) se "suivent" bien par déformation équiréductible, puisque l'on peut suivre les points singuliers réduits après désingularisation. Mais ces invariants ne peuvent pas être définis sans ambiguïté pour deux feuilletages, si l'on ne se donne pas une déformation SL-équisingulière qui les relie. En effet l'arbre dual ne permet pas de distinguer deux points singuliers lorsque, en ces points, les feuilletages sont conjugués (par exemple le double cusp). On perd aussi l'information sur les générateurs du groupe d'holonomie. Pour résoudre cette ambiguïté, nous allons définir, au chapitre 1, une notion de singularité marquée. Les f-invariants sont, dorénavant, appelés invariants SL (SL pour Semi Locaux), car nous ne pouvons plus nous appuyer sur la notion de famille pour les définir.

On peut alors parler de la SL-équivalence entre deux singularités marquées et poser le problème suivant qui est l'objet de cette Thèse :

"deux singularités marquées SL-équivalentes ω et ω' sont-elles reliables par une famille ω_t , holomorphe par morceaux, à type SL constant où $\omega_0 = \omega$ et $\omega_1 = \omega'$?"

⁵Cf. [Mat-Sal₁] p. 139 Theorem C.

Des singularités marquées (Chapitre 1).

Fixons \mathcal{F}_ϖ un germe de feuilletage singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui nous servira de feuilletage modèle. Nous dirons qu'un germe de feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est marqué (*Définition 1.1.1, Définition 1.2.1*) par \mathcal{F}_ϖ si :

1. Il existe un homéomorphisme préservant l'orientation entre les diviseurs D_{ω_0} et D_ϖ associés à la réduction de \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_ϖ qui induit une bijection entre les points singuliers réduits des feuilletages désingularisés $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_\varpi$ associés à \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_ϖ .
2. Chaque composante irréductible du diviseur D_{ω_0} est munie d'un système de lacets (à isotopie près) "simples" qui engendre le groupe de Poincaré de la composante privée du lieu singulier de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$.

Considérons, maintenant, deux germes de feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} , à l'origine de \mathbb{C}^2 , marqués par \mathcal{F}_ϖ . De par le marquage, il existe une bijection entre les composantes irréductibles du diviseur D_{ω_0} et celles du diviseur D_{ω_1} . On dit que deux composantes en bijection sont liées par le marquage. Nous dirons que ces deux feuilletages possèdent les mêmes invariants SL, ou plus simplement qu'ils sont SL-équivalents (*Définition 1.3.1*) si :

1. Pour chaque composante irréductible de D_{ω_0} et D_{ω_1} liée par le marquage, il existe un homéomorphisme, préservant l'orientation, entre ces deux composantes qui induit une bijection entre les deux systèmes de lacets provenant du marquage ainsi qu'une bijection entre les lieux singuliers réduits des feuilletages désingularisés, pondérés par leur type analytique, i.e. cette bijection vérifie : si deux points singuliers réduits $s \in \Sigma_{\omega_0}$ et $s' \in \Sigma_{\omega_1}$ sont en bijection alors les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, au point s , et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$, au point s' , sont holomorphiquement conjugués par un germe de biholomorphisme qui, de plus, identifie les germes des composantes irréductibles de même auto-intersection des germes de diviseurs (D_{ω_0}, s) et (D_{ω_1}, s') .
2. Entre deux composantes irréductibles des diviseurs D_{ω_0} , D_{ω_1} , liées par le marquage, les générateurs des groupes d'holonomie, associés aux lacets provenant des marquages, sont analytiquement conjugués par un même difféomorphisme de conjugaison.

Nous dirons que deux feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ marqués par \mathcal{F}_ϖ sont faiblement SL-reliés (*Définition 1.3.3*) s'il existe une collection de germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$, $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^{\mathcal{M}}$, $i = 0, \dots, n$, marqués par \mathcal{F}_ϖ avec $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_{\tilde{\omega}_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_{\tilde{\omega}_n}^{\mathcal{M}}$ telle que :

1. Pour chaque $i = 0..n$, il existe une déformation SL-équisingulière \mathcal{F}_{η_i} de $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^{\mathcal{M}}$ de paramètre un voisinage de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} telle que sa fibre en 1 est le feuilletage $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_{i+1}}$ et qui vérifie :
 - (a) Si $D \in D_{\tilde{\omega}_i}$ et $D' \in D_{\tilde{\omega}_{i+1}}$ sont liées par le marquage alors elles sont contenues dans une même composante irréductible globale du diviseur, associé à $\tilde{\mathcal{F}}_{\eta_i}$.
 - (b) Si $s \in \Sigma_{\tilde{\omega}_i}$ et $s' \in \Sigma_{\tilde{\omega}_{i+1}}$ sont mis en bijection par la relation de marquage alors ils sont contenus dans une même composante irréductible globale du lieu singulier de $\tilde{\mathcal{F}}_{\eta_i}$.

Nous montrons (*corollaire 1.4.3*) que si deux germes de feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ marqués par \mathcal{F}_{ϖ} sont SL équivalents, alors il existe un homéomorphisme $H : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ entre les diviseurs des réductions de ω_0 et ω_1 , qui est compatible au marquage et qui est de plus holomorphe lorsqu'on le restreint à un voisinage approprié du lieu singulier Σ_{ω_0} .

Maintenant que la problématique a un sens, énonçons le résultat principal :

Théorème B *Soient deux germes de feuilletages holomorphes \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2° espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} . S'ils sont SL-équivalents alors ils sont faiblement SL-reliés.*

Où nous dirons qu'un feuilletage \mathcal{F}_{ω} est de 2° espèce générale (*Définition 0.2.2, Définition 1.4.1, Définition 1.4.2*) s'il est non dicritique, et vérifie les trois conditions suivantes :

1. Si le feuilletage possède, dans sa réduction, des singularités de type noeud-col alors celles-ci se situent uniquement en des points réguliers du diviseur (associé à la désingularisation du feuilletage) et les séparatrices fortes de ces singularités coïncident avec le diviseur.
2. En chaque point singulier du diviseur D_{ω} le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega}$ est :
 - (a) ou bien de type noeud,
 - (b) ou bien de type selle (résonnante ou non) linéarisable,
 - (c) ou bien de type selle résonnante non linéarisable et le chapelet de sphères associé à cette singularité ne possède pas d'autre automorphisme que l'identité (Cf. §5).
3. En chaque point régulier du diviseur D_{ω} et singulier du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega}$ où la singularité est de type noeud-col snc (i.e. la variété faible diverge), l'holonomie de la variété forte possède un chapelet de sphères dont le seul automorphisme est l'identité.

Cette notion est précisée au chapitre I.

Nous dirons que deux feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ marqués par \mathcal{F}_{ϖ} sont SL-cobordants (*Définition 1.3.4*) s'il existe un déploiement SL-équisingulier \mathcal{F}_{η} de \mathcal{F}_{ω_0} de paramètre un voisinage de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} de fibre en 1 le feuilletage \mathcal{F}_{ω_1} et qui vérifie :

- (a) Si $D \in D_{\omega_0}$ et $D' \in D_{\omega_1}$ sont liées par le marquage alors elles sont contenues dans une même composante irréductible globale du diviseur, associé au déploiement $\tilde{\mathcal{F}}_{\eta}$.
- (b) Si $s \in \Sigma_{\omega_0}$ et $s' \in \Sigma_{\omega_1}$ sont mis en bijection par la relation de marquage alors ils sont contenus dans une même composante irréductible globale du lieu singulier de $\tilde{\mathcal{F}}_{\eta}$.

L'intérêt de la différenciation entre déformation et déploiement est évident au vu des Théorèmes I, II, III de Mattei-Salem énoncés ci-dessus. Nous avons été amené à démontrer le résultat suivant :

Théorème A *Soient deux germes de feuilletages holomorphes \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, non dicritiques, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalents. Alors il existe un germe de feuilletage \mathcal{F}_{ω_2} , du même type, marqué par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalent à \mathcal{F}_{ω_1} qui vérifie :*

1. Les feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_2} sont *SL-cobordants*.
2. Il existe un biholomorphisme du diviseur associé à la désingularisation de \mathcal{F}_{ω_2} sur celui associé à la désingularisation de \mathcal{F}_{ω_1} qui induit une bijection "compatible" avec les deux systèmes de marquage par \mathcal{F}_{ω} de ces feuilletages.

De l'application (Chapitre 4).

Une application simple de ce théorème concerne les feuilletages de 2^o espèce dont le type modulaire⁶ au sens de Mattei [Mat-Sal₁] est nul. Nous appelons de tels feuilletages, feuilletages de 2^o espèce simples. Fixons un tel feuilletage \mathcal{F}_{ω} . Lorsque le feuilletage \mathcal{F}_{ω} est une courbe généralisée, de type modulaire nul, alors la courbe $sep(\omega)$, dont les composantes irréductibles sont les séparatrices de ω , est une singularité simple au sens d'Arnol'd [Arn₁]. Lorsque le feuilletage \mathcal{F}_{ω} est seulement de 2^o espèce, la courbe $sep(\omega)$ peut posséder des composantes irréductibles formelles divergentes. Dans ce cas, on peut voir que le polynôme de Taylor P de l'équation de l'union des séparatrices formelles, tronqué à un ordre suffisamment grand, est une fonction simple au sens d'Arnol'd. Dans les deux cas, Mattei démontre que le type modulaire de P , $m(P)$, et l'entier $\delta(\omega)$, défini dans [Mat₁], sont égaux. De plus, sous l'hypothèse de 2^o espèce, nous vérifions facilement que si l'entier $\delta(\omega)$ est nul alors l'entier $\tau(\omega)$ l'est aussi. Ainsi, nous dirons que le feuilletage \mathcal{F}_{ω} est du type A , resp. D , resp. E_6 , resp. E_7 , resp. E_8 si le polynôme de Taylor P de l'équation de l'union des séparatrices formelles, tronqué à un ordre suffisamment grand, est de type d'Arnol'd A , resp. D , resp. E_6 , resp. E_7 , resp. E_8 . L'arbre de résolution du feuilletage étant identique à l'arbre de réduction de ses séparatrices, celui-ci est connu [Chapitre 4] : Il est constitué d'une composante irréductible de valence⁷ 3, d'une ou deux branches mortes et d'une à trois séparatrices. Fixons \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages de 2^o espèce, simples, du même type A , D , E_6 , E_7 , ou E_8 . S'attribuer un marquage par \mathcal{F}_{ω_0} du feuilletage \mathcal{F}_{ω_1} est équivalent à se donner :

1. Un homéomorphisme (à homotopie près) préservant l'orientation entre les uniques composantes irréductibles de valence 3 des diviseurs D_{ω_0} et D_{ω_1} qui induit une bijection entre les points singuliers portés par ces composantes, pondérés par le type analytique du germe des feuilletages réduits, en ces points, associés à \mathcal{F}_{ω_0} et à \mathcal{F}_{ω_1} .
2. Un système de lacets "simples" sur l'unique composante irréductible de valence 3 du diviseur D_{ω_1} qui génère le groupe de Poincaré de cette composante privée des 3 points singuliers du feuilletage.

D'après les théorèmes I et III de Mattei-Salem [Mat-Sal₁], les feuilletages simples étant de type modulaire nul, cela signifie que deux tels feuilletages sont SL-reliés si, et seulement si, ils sont analytiquement conjugués. Ainsi, par le théorème B, deux feuilletages marqués, simples, de 2^o espèce, SL-équivalents sont analytiquement conjugués.

De l'étude de la SL-équivalence des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} marqués par le feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} , nous obtenons les théorèmes suivants. Notons $P^{(i)}$ la composan-

⁶Le type modulaire d'une 1-forme ω est l'entier $\delta(\omega)$ donné dans le **Théorème I** de Mattei-Salem.

⁷La valence d'une composante irréductible du diviseur est le nombre de points singuliers du feuilletage réduit portés par la composante.

te irréductible de valence 3 du diviseur D_{ω_i} et $\{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}\}$ les trois points singuliers du feuilletage portés par cette composante, $i = 0, 1$.

Théorème 0.0.1 (Théorème C) *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de \mathcal{L}° espèce, simples.*

1. *Supposons ces deux feuilletages de même type A_{2n} , ou E_6 , ou E_8 .
Alors ils sont analytiquement conjugués si, et seulement si, il existe un germe de biholomorphisme $\Phi : (T^{(0)}, q^{(0)}) \rightarrow (T^{(1)}, q^{(1)})$ qui conjugue les germes de difféomorphisme d'holonomie $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$.*
2. *Supposons ces deux feuilletages de même type A_{2n-1} , ou E_7 , ou de \mathcal{L}° espèce générale de type D .
Alors ils sont analytiquement conjugués si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
 - (a) *Il existe un germe de biholomorphisme $\Phi : (T^{(0)}, q^{(0)}) \rightarrow (T^{(1)}, q^{(1)})$ qui conjugue les germes de difféomorphisme d'holonomie $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$;*
 - (b) *Les valeurs propres de la partie linéaire des champs de vecteurs associés aux germes de feuilletages réduits aux points $s_j^{(0)}$ et $s_j^{(1)}$ sont égaux, $j = 1, 2, 3$.*

Dans ces assertions, nous utilisons les notations suivantes :

1. (a) On a fait le choix d'une réindexation (i.e. d'un marquage) des singularités $s_j^{(1)}$ de sorte que les points singuliers $s_j^{(0)}$ et $s_j^{(1)}$ sont portés par des composantes irréductibles de même auto-intersection. Dans le cas où les feuilletages sont du type A_{2n} , D_{2n+1} , E_6 , E_7 , E_8 il y a unicité de cette réindexation.
2. Le germe $(T^{(i)}, q^{(i)})$ est un germe de transversale, en un point régulier, à la composante $P^{(i)}$, $i = 0, 1$.
3. Les lacets $(\gamma_j^{(i)}, q^{(i)})_{j=1,2,3}$ sont un système de lacets simples générateur du Π_1 de la variété $P^{(i)} - \{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}\}$, $i = 0, 1$, de sorte qu'il existe un unique homéomorphisme $g : P^{(0)} \rightarrow P^{(1)}$ vérifiant $g(s_j^{(0)}) = s_j^{(1)}$ qui induit une bijection entre les deux systèmes de lacets : $g^\#(\gamma_j^{(0)}) = \gamma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$.
4. L'application $h_j^{(i)}$ est le difféomorphisme d'holonomie de la singularité $s_j^{(i)}$ du feuilletage réduit associé à \mathcal{F}_{ω_i} le long du lacet $\gamma_j^{(i)}$ calculé sur la transversale $(T^{(i)}, q^{(i)})$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$.

Théorème 0.0.2 (Théorème D) *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$, simples, de \mathcal{L}° espèce de type A , E_6 , E_7 , E_8 , resp. de \mathcal{L}° espèce générale de type D , tels que le groupe d'holonomie de l'unique composante de valence 3 est rigide.*

Si les germes de feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont formellement conjugués alors ils le sont analytiquement.

Les singularités définies par un germe de 1-forme ω de 1-jet non nul sont appelées nilpotentes lorsque la partie linéaire du champ associé est du type $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ces singularités sont toutes des singularités simples, de 2° espèce de type A. De plus, elles sont étudiées à type formel fixé, nous avons ici des hypothèses "plus faibles", nous demandons seulement :

1. l'existence d'une conjugaison formelle entre les séparatrices formelles des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} ,
2. l'égalité des valeurs propres de la partie linéaire des champs de vecteurs associés aux feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_j^{(0)})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_j^{(1)})}$, pour tout $j = 1, 2, 3$.

Nous retrouvons, alors, les résultats classiques concernant les singularités nilpotentes obtenus par Berthier, Cerveau, Meziani, Moussu, Sad dans [Cer-Mou], [Ber-Mez-Sad], [Mez2].

Nous poursuivons cette introduction en donnant les idées principales des démonstrations du Théorème A et du Théorème B.

De la démonstration du Théorème A (Chapitre 2).

Nous notons $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_i}$ le feuilletage réduit associé à la réduction du feuilletage \mathcal{F}_{ω_i} , $(\mathcal{M}_{\omega_i}, D_{\omega_i})$ le germe de variété, le long du diviseur D_{ω_i} associé à cette réduction et Σ_{ω_i} les singularités réduites du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_i}$, $i = 0, 1, 2$.

Les feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} étant tous deux marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , il existe un homéomorphisme $\tilde{\varphi} : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible au marquage par \mathcal{F}_{ϖ} tel que :

1. L'homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ induit une bijection entre les deux systèmes de lacets dus aux marquages par \mathcal{F}_{ϖ} des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} .
2. Le marquage de \mathcal{F}_{ω_1} par \mathcal{F}_{ω_0} induit par $\tilde{\varphi}$ composé avec le marquage de \mathcal{F}_{ω_0} par \mathcal{F}_{ϖ} donne le marquage initial de \mathcal{F}_{ω_1} par \mathcal{F}_{ϖ} .

Nous montrons l'existence du déploiement SL-équiréductible \mathcal{F}_{η} de \mathcal{F}_{ω_0} de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$ tel que la fibre en 1 de ce déploiement est le feuilletage \mathcal{F}_{ω_2} cherché.

Remarquons que ce déploiement, \mathcal{F}_{η} , étant SL-équiréductible, le marquage de \mathcal{F}_{ω_0} par \mathcal{F}_{ϖ} induit un marquage canonique de chacune des fibres de \mathcal{F}_{η} par \mathcal{F}_{ϖ} , en particulier de sa fibre en 1. Le marquage du feuilletage \mathcal{F}_{ω_2} est donc induit par la construction.

L'idée de la construction est de modifier, de manière continue, la structure holomorphe de l'espace $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ muni du déploiement trivial $\mathcal{F}_{\omega_0} \times (\mathbb{C}, [0, 1])$, puis de redresser cette structure pour obtenir le déploiement \mathcal{F}_{η} cherché. Nous travaillons sur la cime de l'arbre de résolution $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, D_{\omega_0} \times [0, 1])$ associé à la réduction du feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$, où $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$. Nous démontrons l'existence (*Définition 2.2.1*, *Proposition 2.2.2*) d'une structure holomorphe, a priori différente de la structure standard, notée $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$, sur la variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ qui vérifie :

1. la seconde projection canonique $pr_2 : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P) \rightarrow P$ est holomorphe pour cette structure,
2. le déploiement produit $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$ sur l'espace $((\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)$ est encore un feuilletage holomorphe, (*Proposition 2.2.3*),

3. l'existence d'un biholomorphisme $\varphi : (D_{\omega_0} \times P, \mathcal{A}_{\omega_0 \times P|D_{\omega_0} \times P}^a)|_{pr_2^{-1}(1)} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible aux marquages par \mathcal{F}_{ϖ} des feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0} \times 1$ et \mathcal{F}_{ω_1} , où D_{ω_1} est muni de sa structure holomorphe naturelle, (*Proposition 2.2.4*),
4. l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$ muni de sa structure holomorphe naturelle et la variété $((\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)|_{pr_2^{-1}(0)}$ sont biholomorphes.

Le théorème de Grauert à paramètre, (*Théorème 2.3.1*, dont une référence se trouve dans [Mat₁]), qui affirme l'unicité de la structure holomorphe des voisinages des espaces projectifs complexes, de dimension 1, d'auto-intersection -1, induit l'existence :

1. D'une variété germifiée (\mathcal{M}, D) provenant d'une succession finie d'éclatements de centre des courbes lisses et étales au-dessus de P , de base $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ munie de sa structure holomorphe naturelle, notée \mathcal{A}^{st} .
2. D'un biholomorphisme $H : ((\mathcal{M}, D), \mathcal{A}^{st}) \rightarrow ((\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)$, fibré au-dessus de l'espace de paramètre P , dont la fibre en 0, $H|_{\pi^{-1}(0)}$, est l'identité (en vertu de la propriété 2. ci-dessus) où $\pi : (\mathcal{M}, D) \rightarrow P$ est la projection naturelle induite par cette construction.

La variété (\mathcal{M}, D) est "naturellement" munie d'un feuilletage holomorphe de codimension 1, $\tilde{\mathcal{F}}_{\eta} = H^*(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \times P)$, qui est un déploiement du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$. Par collapsages⁸ successifs des composantes irréductibles du diviseur D , nous obtenons le déploiement \mathcal{F}_{η} de \mathcal{F}_{ω_0} de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$ le long de $(0 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ qui est, par construction, SL-équiréductible.

Pour finir la démonstration du théorème A, il faut expliciter la construction de la structure holomorphe $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$ sur la variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$. Cette démonstration n'est pas naturelle, elle passe par l'édification d'un germe de variété, notée (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) , fibrée au-dessus de P , dont la fibre en 0 est l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$, la fibre en 1 est l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1})$. De plus, le germe de variété (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) est \mathcal{C}^{∞} -difféomorphe, par un difféomorphisme G , à l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ muni de sa structure analytique naturelle. L'existence de cette variété est démontrée de la manière suivante.

De par le corollaire 1.4.3, il existe un homéomorphisme $\tilde{\varphi} : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible aux marquages par \mathcal{F}_{ϖ} des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} , globalement \mathcal{C}^{∞} et qui est biholomorphe au voisinage des points singuliers du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$.

Nous édifions, alors, le diviseur D_P^a et l'application $\varphi_P^a : D_{\omega_0} \times P \rightarrow D_P^a$: lorsque le diviseur D_{ω_0} est réduit à un unique projectif, l'espace D_P^a est trivialement $\mathbb{P}^1 \times P$. Par contre, un théorème d'intégration de type Ahlfors-Bers [Ahl] (*Théorème 2.1.7*) est nécessaire pour démontrer l'existence d'une application, fibrée au-dessus de P , $\varphi_P^a : D_{\omega_0} \times P = \mathbb{P}^1 \times P \rightarrow D_P^a = \mathbb{P}^1 \times P$ qui est un \mathcal{C}^{∞} -difféomorphisme global, un biholomorphisme au voisinage de chacune des composantes irréductibles de $\Sigma_{\omega_0} \times P$, vaut l'identité au-dessus de 0 et φ au-dessus de 1. Lorsque le diviseur D_{ω_0} possède plusieurs composantes irréductibles, nous scindons cet espace en composantes irréductibles, nous appliquons le raisonnement précédent sur chacune de ses composantes et recollons le tout. Il n'y a plus de réelles obstructions. (*Lemme 2.1.5*)

Nous finissons cette construction en démontrant l'existence de la variété \mathcal{M}_P^a , par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles du diviseur

⁸Le théorème de Grauert précédent assure la cohérence de cette construction (*Corollaire 2.3.2*).

D_{ω_0} : lorsque le diviseur D_{ω_0} est réduit à un projectif, l'espace \mathcal{M}_P^a n'est autre que $\tilde{\mathbb{C}}^2 \times P$ où $\tilde{\mathbb{C}}^2$ est l'éclaté de \mathbb{C}^2 en 0. Nous poussons la récurrence par éclatement des courbes (lisses et étales au-dessus de P) $\varphi_P^a(\Sigma_{\omega_0} \times P)$. (*Lemme 2.1.2*).

La variété (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) construite, il est facile de définir l'atlas $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$ sur l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ au moyen des projections canoniques et de l'application G de sorte que le difféomorphisme G devienne holomorphe sur le diviseur D_P^a et que la variété $((\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)$ vérifie les 4 assertions énoncées précédemment.

Enfin, remarquons que l'assertion 2 du Théorème A est réalisée par l'application $\varphi \circ H_{|\pi^{-1}(1)} : (D, \mathcal{A}^{st}) \rightarrow D_{\omega_1}$ qui est un biholomorphisme compatible avec les marquages par \mathcal{F}_{ϖ} des feuilletages $\mathcal{F}_{\eta|\pi^{-1}(1)}$ et \mathcal{F}_{ω_1} . (§ 2.3.1)

De la démonstration du Théorème B (Chapitre 3).

Nous avons été amené, dans la démonstration de ce résultat, à comprendre où sont les obstructions à obtenir de déploiement SL-équiréductible qui relierait ces deux feuilletages. En effet, sous les hypothèses de ce théorème, si nous supposons, de plus, que pour chaque point singulier de type non noeud-col, à holonomie linéarisable, resp. chaque point singulier de type noeud-col snc⁹, du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, le centralisateur du difféomorphisme d'holonomie, de cette singularité, est généré par le difféomorphisme d'holonomie, alors les feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont SL-cobordants. Ainsi, l'obstruction à obtenir des déploiements se lit, dans l'étude du groupe quotient du centralisateur de l'holonomie par le difféomorphisme d'holonomie, pour chaque point singulier du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$.

Remarquons qu'en utilisant le **Théorème A**, le **Théorème B** se ramène à la problématique suivante :

Lemme Clé B1 *Soient deux germes de feuilletages holomorphes \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2^o espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalents. Si il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible aux marquages, alors ces deux feuilletages marqués sont SL-reliés.*

Avant d'ébaucher cette démonstration, nous devons définir certaines notions :

Notons $Comp(D_{\omega_0})$ l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur D_{ω_0} . Nous appelons recouvrement adapté, (*Cf. Chapitre 0*) noté

$$(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\omega_0} \cup Comp(D_{\omega_0})}$$

de la variété germifiée $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$, tout recouvrement ouvert qui vérifie :

1. L'ensemble $(U_i)_{i \in \Sigma_{\omega_0} \cup Comp(D_{\omega_0})}$ est un recouvrement ouvert du diviseur D_{ω_0} ne possédant pas d'intersection 3 à 3.
2. Lorsque $i \in \Sigma_{\omega_0}$, l'ouvert U_i est un voisinage de la singularité i dans D_{ω_0} .
3. Lorsque $i \in Comp(D_{\omega_0})$, l'ouvert U_i est l'ouvert $i - \Sigma_{\omega_0}$.

Fixons $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\omega_0} \cup Comp(D_{\omega_0})}$ un recouvrement adapté du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$.

⁹ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

Pour chaque ouvert U_i , $i \in \Sigma_{\omega_0} \cup \text{Comp}(D_{\omega_0})$, nous allons considérer des sous-groupes du groupe $\text{Diff}(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)$ des germes de biholomorphismes, le long de U_i , $\Phi : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)$, définis sur un voisinage de U_i dans \mathcal{M}_{ω_0} qui vérifient $\Phi(U_i) = U_i$. Observons que nous n'exigeons pas que la restriction de Φ à U_i soit l'identité. Le premier sous-groupe considéré est le groupe des automorphismes du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)}$, noté $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)})$, composé de l'ensemble des biholomorphismes de $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)$ qui laissent globalement invariant le feuilletage ; i.e. si $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)})$ alors $\Phi^* \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)} \right) = \tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)}$. Deux sous-groupes de $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)})$ auront une importance toute particulière par la suite :

- Le sous-groupe $\text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)})$ composé des germes de biholomorphismes qui valent l'identité sur "l'espace des feuilles" associé au feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)}$.
- Le sous-groupe $\text{Aut}_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)})$ composé des germes de biholomorphismes qui valent l'identité sur U_i .

Remarquons que $U \rightarrow \text{Aut}_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U)})$ forme un faisceau de groupe alors que $U \rightarrow \text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U)})$ ne peut être considéré comme un espace de section d'un faisceau, l'application de restriction n'étant pas définie, c.a.d. si $V \subset U$ et $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U)})$ alors $\Phi|_V$ n'envoie pas forcément l'ouvert V sur lui-même (Paragraphe 3.1).

Revenons à la démonstration. Notons $\Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi}) = \{(i, j) / i \in j\} \subset \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi})$. Nous définissons (Paragraphe 3.2.1) la notion d'extensions locales adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U} qui est une collection

$$\wp = \left((f_{(ij)})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})}, (f_j)_{j \in \text{Comp}(D_{\varpi})} \right)$$

où sur chaque ouvert $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_l)$, $l \in \Sigma_{\omega_0} \cup \text{Comp}(D_{\omega_0})$, le germe de biholomorphisme f_l est une extension du biholomorphisme $\varphi|_{U_l}$, qui conjugue les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_l)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \varphi(U_l))}$. A cette collection nous associons un nouvel ensemble, que nous appelons quasi-cocycle du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$ et que nous notons $\partial(\wp)$, qui est la collection :

$$\partial(\wp) = \left((\phi_i)_{i \in \text{Sing}(D_{\varpi})}, (\phi_{ij})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})} \right),$$

avec :

- $\phi_i = f_{(ij)}^{-1} \circ f_{(ik)}$ où $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, $j, k \in \text{Comp}(D_{\varpi})$ et $i = j \cap k$.
- $\phi_{ij} = f_j^{-1} \circ f_{(ij)}$ où $(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})$.

Nous dirons que le quasi-cocycle $\partial(\wp)$ est de quintessence s'il vérifie :

1. pour chaque $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, le germe d'automorphisme

$$\phi_i : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i)) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))$$

est un élément de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \right)$.

Nous démontrons alors (Paragraphe 3.2.2) la proposition suivante :

"Considérons deux germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2° espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalents tels

qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible¹⁰ aux marquages. Alors il existe toujours une collection \wp d'extensions locales adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U} telle que $\partial(\wp)$ est un quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$.

Ces extensions sont construites (*Lemme 3.2.2*) au moyen des lemmes d'existence de Mattei-Moussu [Mat-Mou], de Meziani [Mez₂], ainsi que par des techniques de prolongement holonome. Nous considérons par la suite \wp la collection d'extensions locales que nous avons construit.

Nous prouvons (*Paragraphe 3.1.2*), sous les hypothèses du **lemme clé B1**, que tout élément $\phi_i, \phi_{ij} \in \partial(\wp)$ est holomorphiquement isotope à l'identité. La méthode utilisée pour construire les extensions locales, nous permet d'obtenir de plus l'existence des germes de biholomorphisme (provenant des isotopies) suivants :

1. pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$, il existe un biholomorphisme

$$\Phi_i : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, i \times [0, 1]) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, i \times [0, 1])$$

fibré au-dessus de l'espace des paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, appartenant au groupe $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, i})} \times (\mathbb{C}, [0, 1]))$ dont la fibre en 0 vaut l'identité et la fibre en 1 vaut ϕ_i , où $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, i})} \times (\mathbb{C}, [0, 1])$ désigne le déploiement constant de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$ le long de $(0 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, i})}$.

2. Pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}, j \in Comp(D_{\varpi}), i \in j$, il existe un biholomorphisme

$$\Phi_{i,k} : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, (U_i \cap U_k) \times [0, 1]) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, (U_i \cap U_k) \times [0, 1])$$

fibré au-dessus de l'espace des paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, appartenant au groupe $Aut\left(\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_k})}\right)^{cste}\right)$ dont la fibre en 0 vaut l'identité et la fibre en 1 vaut ϕ_{ik} , où $\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_k})}\right)^{cste}$ désigne la déformation constante de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$ le long de $(0 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_k})}$.

Nous démontrons, de plus, que lorsque i est un point singulier de type noeud-col sc¹¹, ou lorsque l'holonomie associée à ce point singulier est non linéarisable, alors tout élément de $Aut_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_k})})$ est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_k})})$.

Ces isotopies nous permettent de construire (*Paragraphe 3.3.2, Paragraphe 3.3.3*) une variété qui, par le théorème de Grauert (déjà cité plus haut), est bi-holomorphe à la cime de l'arbre de réduction de la déformation SL-équisingulière recherchée. Cette construction se fait en deux étapes :

1° étape : construction de la déformation au voisinage de chaque composante irréductible (Lemme 3.3.1).

Pour chaque composante irréductible $k \in Comp(D_{\omega_0})$ du diviseur D_{ω_0} , nous construisons le germe de variété feuilletée (\mathcal{M}_k, D_k) en recollant les ouverts $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, U_i \times [0, 1])_{i \in S_k \cup \{k\}}$, feuilletés par la déformation constante

¹⁰ Cf. § 1.2.2.

¹¹ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

$(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)})^{cste}$, au moyen des isotopies holomorphes $\Phi_{i,k}$ précédentes, le long des ouverts $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, (U_i \cap U_k) \times [0, 1])_{i \in S_k}$ où S_k est l'ensemble des points singuliers du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ portés par la composante k . Ces isotopies appartenant à

$$Aut\left(\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_k)}\right)^{cste}\right)$$

définissent un feuilletage holomorphe de dimension 1, noté \mathcal{F}_k , sur la variété (\mathcal{M}_k, D_k) .

2° étape : construction globale de la déformation (Paragraphe 3.3.2).

Nous contruisons la variété feuilletée (\mathcal{M}, D) en recollant les variétés

$$(\mathcal{M}_k, D_k)_{k \in Comp(D_{\omega_0})},$$

feuilletées par \mathcal{F}_k , au moyen des isotopies holomorphes Φ_i précédentes, le long des ouverts $(\mathcal{M}_k, V_1(i))$, $(\mathcal{M}_j, V_2(i))$ où $i \in \Sigma_{\varpi}$ et $V_1(i)$, resp. $V_2(i)$, est un voisinage ouvert de la singularité i dans (\mathcal{M}_k, D_k) , resp. (\mathcal{M}_j, D_j) . La remarque clé de cette construction est que ces isotopies appartiennent à " $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, V(i))} \times (\mathbb{C}, [0, 1]))$ " et définissent ainsi un feuilletage holomorphe global de dimension 1, noté \mathcal{F} , sur (\mathcal{M}, D) .

La fibre au-dessus de 0 de ces isotopies étant l'identité, la fibre au-dessus de 0 de la variété (\mathcal{M}, D) feuilletée par \mathcal{F} est la variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$ feuilletée par le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$. De plus la collection des fibres en 1 de ces isotopies correspond aux éléments de $\delta(\varphi)$ d'extensions locales adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U} , que nous avons construites. Ainsi, la fibre au-dessus de 1 de la variété (\mathcal{M}, D) feuilletée par \mathcal{F} est biholomorphe, par un biholomorphisme valant φ sur le diviseur, à la variété $(\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1})$ feuilletée par le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$.

En utilisant, une fois de plus, le théorème de Grauert à paramètre (*Théorème 2.3.1*) sur l'unicité de la structure holomorphe des voisinages d'espaces projectifs complexes, de dimension 1, d'auto-intersection négative, nous montrons que la variété (\mathcal{M}, D) feuilletée par \mathcal{F} est la cime de l'arbre de résolution d'une déformation, par construction SL-équisingulière, de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$, le long de $(0 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ de \mathcal{F}_{ω_0} qui SL-relie les feuilletages marqués \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} .

Cette construction nécessite bien deux étapes, les isotopies Φ_i , $i \in \Sigma_{\omega_0}$ vont de $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, U_i \times [0, 1])$ dans $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, \tilde{U}_i \times [0, 1])$, où U_i et \tilde{U}_i sont des voisinages ouverts, a priori distincts, du point singulier i dans D_{ω_0} . Elles ne peuvent être considérées comme des 1-cocycles de groupe (on ne peut pas les composer).

Signalons encore que si toutes les isotopies $\Phi_{i,k}$, $i \in \Sigma_{\varpi}$, $k \in Comp(D_{\varpi})$, $i \in k$, considérées ci-dessus sont des isotopies holomorphes fortes dans $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_k)})$, les variétés (\mathcal{M}_k, D_k) sont alors construites en recollant les ouverts $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, U_i \times [0, 1])_{i \in A_k \cup \{k\}}$, feuilletés par le déploiement constant $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)} \times (\mathbb{C}, [0, 1])$. Nous obtenons ainsi un déploiement SL-équiréductible : les feuilletages marqués \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont alors SL-cobordants.

Terminons par les remarques suivantes. Fixons i un point singulier du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, k une composante irréductible du diviseur D_{ω_0} qui porte i et h le difféomorphisme d'holonomie du point singulier i du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_k)}$.

La construction de l'isotopie $\Phi_{i,k}$ (considérée dans la démonstration précédente) se ramène à la construction d'une isotopie holomorphe qui relie l'identité

au difféomorphisme $[g_{i,k}]$ dans le groupe quotient¹² $Cen(h)/\langle h \rangle$, où $g_{i,k}$ désigne la restriction de l'application $f_{(ik)}^{-1} \circ f_k$ à une transversale Σ invariante; $f_{(ik)}^{-1} \circ f_k(\Sigma) = \Sigma$. C'est cette isotopie qui contient toutes les obstructions. En effet, trois cas apparaissent :

1. Si $g_{i,k}$ est une puissance relative du difféomorphisme h , i.e. $g_{i,k} = h^n$, $n \in \mathbb{Z}$, alors l'isotopie est constante. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, ce difféomorphisme ne génère pas d'obstruction à la construction d'un déploiement.
2. Si $g_{i,k}$ est holomorphiquement isotope à l'identité dans $Cen(h)/\langle h \rangle$, alors cette isotopie, si elle n'est pas constante, génère une obstruction à la construction d'un déploiement mais pas à celle d'une déformation.
3. Enfin, il se peut (pas dans les hypothèses du Théorème B, bien sûr) que $g_{i,k}$ ne soit pas dans la composante connexe du groupe $Cen(h)/\langle h \rangle$ contenant l'identité, dans ce cas, nous n'obtenons ni déploiement, ni déformation. Cela apparaît comme une véritable obstruction.

L'appendice sur les chapelets de sphères correspond à l'étude de ce problème. Nous sommes arrivé à la conclusion que généralement le groupe des automorphismes d'un chapelet est restreint à l'identité. Un objectif prochain est de démontrer la généralité de cette assertion. Nous nous sommes aussi aperçu de la nécessité de restreindre notre étude aux feuilletages de 2° espèce générale. En effet, toute la construction précédente s'appuie sur la mise en place d'isotopies reliant les "quasi-cocycles" aux difféomorphismes d'identité. Or le groupe des automorphismes d'un chapelet de sphères est généralement non connexe. Nous ne pouvons pas passer outre ces obstructions.

Finalement, constatons que l'identité du groupe quotient $Cen(h)/\langle h \rangle$ se remonte sur la transversale en un difféomorphisme qui est une puissance relative du difféomorphisme d'holonomie h , i.e. $g = h^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ce difféomorphisme g est la restriction d'un difféomorphisme global $G : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_k) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_k)$ qui vaut " h^n " sur chaque fibre d'une projection $\rho : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_k) \rightarrow U_i \cap U_k$. Si nous considérons l'holonomie h sur la transversale $\rho^{-1}(x)$, $x \in U_i \cap U_k$, comme le flot au temps 1, restreint à $\rho^{-1}(x)$, d'un champ de vecteurs holomorphes X , tangent au feuilletage, il apparaît que le difféomorphisme G est le flot, au temps n , de ce champ de vecteurs. En utilisant la méthode de la "manivelle", on réalise l'isotopie holomorphe qui relie G à l'identité, i.e. $G = \exp(n.X)$ et l'isotopie est $G_t = \exp(tn.X)$ où t appartient à $(\mathbb{C}, [0, 1])$.

De l'avenir

Il apparaît à la suite de ce travail de nouvelles pistes de recherche. La problématique formelle associée apparaît motivante, il serait intéressant de savoir sous quelles conditions des feuilletages formels sont SL-relies ou SL-cobordants, resp. formellement SL-relies ou formellement SL-cobordants. Nous pourrions alors rejoindre les travaux de Lefloch sur la rigidité des déformations formelles. Un autre axe de recherche est de se poser la question des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de la SL-reliabilité, resp. du SL-cobordisme, entre

¹²Nous notons $Cen(h)$ le centralisateur de h , i.e. le groupe des difféomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ qui commutent à h .

deux feuilletages. En effet, dans cette Thèse, nous exhibons seulement des conditions suffisantes. Il serait aussi souhaitable d'établir la généralité de la notion de feuilletage de 2^o espèce générale.

Section 0.0. : De la démonstration du Théorème B (Chapitre 3).

...

0 Germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ (et associés).

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions usuelles concernant les germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Nous précisons aussi, les notions de germe de déformation, resp. de déploiement, d'un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, d'espace de paramètre $(\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$, le long de $(0 \times \mathbb{C}^p, 0 \times \mathcal{K})$, dans le cas où \mathcal{K} est un compact.

0.1 Généralités sur les feuilletages

Considérons une variété holomorphe \mathcal{M} de dimension p . Un *atlas holomorphe feuilleté de dimension n* sur \mathcal{M} est un atlas holomorphe $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ compatible avec la structure complexe de \mathcal{M} , tel que pour tout $\alpha \in I$, l'image de l'ouvert U_α par l'application φ_α est un polydisque de $\mathbb{C}^p \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{p-n}$ et les changements de cartes $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sont du type $(f_{\alpha\beta}(x, y), g_{\alpha\beta}(y))$ avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_{p-n})$ désignant les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^p \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{p-n}$. Deux tels atlas \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalents si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est un atlas holomorphe feuilleté de dimension n sur \mathcal{M} . Un *feuilletage holomorphe régulier de dimension n* sur \mathcal{M} est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas holomorphe feuilleté de dimension n sur \mathcal{M} . Considérons un feuilletage holomorphe \mathcal{F} régulier de dimension n , défini sur \mathcal{M} par un atlas feuilleté maximal \mathcal{A} . Les sous-variétés $y \circ \varphi = \text{cste}$, avec $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ s'appellent *plaques* du feuilletage. Une *feuille* de \mathcal{F} est la classe de la relation d'équivalence engendrée par : "appartenir à la même plaque". Ainsi la donnée d'un feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{M} induit une partition de \mathcal{M} en variétés holomorphes immergées de dimension n qui ne sont autres que les feuilles. Nous serons amené à considérer des feuilletages holomorphes sur \mathcal{M} définis par des 1-formes holomorphes. On désignera par $\Lambda_{\mathcal{M}}^1$ le faisceau des germes de 1-formes différentielles sur une variété holomorphe \mathcal{M} . En fait, un faisceau $\Lambda_{\mathcal{F}}$ de sous-module de $\Lambda_{\mathcal{M}}^1$, localement libre de rang q , vérifiant en chaque point m de \mathcal{M} la relation d'intégrabilité (I) : $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^q \wedge d\omega^i = 0$ pour tout $\omega^i \in \Lambda_{\mathcal{F}, m}$, et la relation de régularité (R) : $\text{codim}(\Delta_m) = q$ où $\Delta_m = \bigcap_{\omega \in \Lambda_{\mathcal{F}, m}} \text{Ker}(\omega)$, définit un atlas feuilleté : en effet,

en appliquant en chaque point m le théorème d'intégration de Frobenius, on obtient des coordonnées locales telles que $\Lambda_{\mathcal{F}, m}$ est engendré par dy_1, \dots, dy_{p-n} , où $p - n = q$. Il est naturel de définir la notion de *feuilletage holomorphe singulier de codimension q* sur \mathcal{M} comme la donnée d'un faisceau de sous-module $\Lambda_{\mathcal{F}}$ de $\Lambda_{\mathcal{M}}^1$, localement libre de rang q , vérifiant en chaque point m de \mathcal{M} la relation d'intégrabilité (I) . Le lieu singulier du feuilletage \mathcal{F} est le sous-ensemble analytique $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{m \in \mathcal{M} \text{ tel que } \text{codim}(\Delta_m) \neq q\}$. En divisant localement les générateurs de $\Lambda_{\mathcal{F}, m}$ par le pgcd de leurs coefficients, on construit un feuilletage, le *feuilletage saturé* de \mathcal{F} , noté $\text{sat}(\mathcal{F})$, dont la codimension du lieu singulier est supérieure ou égale à 2. Il coïncide avec \mathcal{F} sur $\mathcal{M} - \text{Sing}(\mathcal{F})$. En quelque sorte, le saturé de \mathcal{F} est le "prolongement régulier maximal" du feuilletage \mathcal{F} .

Certaines sous-variétés de \mathcal{M} sont particulières pour le feuilletage \mathcal{F} , voici leur définition. Une *variété intégrale* de \mathcal{F} , ou *variété \mathcal{F} -invariante*, \mathcal{M}' est une sous-variété holomorphe plongée $\Upsilon : \mathcal{M}' \hookrightarrow \mathcal{M}$ telle que pour tout $m \in \Upsilon(\mathcal{M}')$, tout $\omega \in \Lambda_{\mathcal{F}, m}$, la 1-forme $\Upsilon^*\omega$ est identiquement nulle. Une *séparatrice S du feuilletage \mathcal{F}* est une variété \mathcal{F} -invariante de \mathcal{M} qui est de plus la partie régulière

d'un sous-ensemble analytique fermé de \mathcal{M} , irréductible, de codimension 1. Nous appelons transformée stricte du feuilletage \mathcal{F} par une application holomorphe $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ et le notons $f^*(\mathcal{F})$, le feuilletage saturé sur \mathcal{N} associé au faisceau $f^{-1}(\Lambda_{\mathcal{F}})$ localement engendré par $(f^{-1}(\omega^1), \dots, f^{-1}(\omega^q))$ où $\omega^1, \dots, \omega^q$ engendrent $\Lambda_{\mathcal{F},m}$ lorsque celui-ci est un faisceau localement libre de rang q .

0.2 Réduction des singularités de germes de feuilletages de \mathbb{C}^2 singulier en 0.

0.2.1 Singularités réduites.

Commençons ce paragraphe par des généralités sur les germes de feuilletages de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers à l'origine. Considérons un germe de feuilletage \mathcal{F}_ω de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine défini par le germe de 1-forme $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ tel que l'idéal (a, b) admet l'origine comme zéro isolé. La singularité est réduite si, quitte à effectuer un changement de coordonnées holomorphes, ω s'écrit $\lambda xdy + \mu ydx + \dots$ avec μ non nul et $\lambda/\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}_{<0}$. Elle est :

1. de type *noeud* si $\lambda/\mu \in \mathbb{R}_{<0} - \mathbb{Q}_{<0}$,
2. de type *col (ou selle)* si $\lambda/\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$,
3. de type *noeud-col* si λ est nul.

Lorsque λ est nul, la singularité sera dite ici de type *noeud col sc (Séparatrices Convergentes)* si elle possède deux séparatrices analytiques et de type *noeud col snc (Séparatrices Non Convergentes)* sinon (dans ce cas, elle en possède toujours une, appelée variété forte).

Une singularité de type col est résonnante si $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$. Nous dirons qu'elle est non résonnante diophantienne si λ/μ vérifie la condition de Brjuno [Brj] :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$$

où q_n est le dénominateur obtenu par développement en fraction continue du réel λ/μ . On sait qu'alors, il existe un système de coordonnées holomorphes qui linéarise ω , à unité multiplicative près.

Une singularité non réduite est dicritique si elle possède un nombre infini de séparatrices.

Plus généralement un point singulier d'un feuilletage \mathcal{F}_v sur une variété \mathcal{M} de dimension 2 est réduit s'il existe un germe de biholomorphisme $\Psi : (\mathcal{M}, m) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tel que le germe du feuilletage $(\Psi^{-1})^*(\mathcal{F}_v)$ est un feuilletage réduit à l'origine de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

0.2.2 Arbre de réduction

Considérons un germe de feuilletage de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine \mathcal{F}_ω . Quand \mathcal{F}_ω n'est pas réduit, on lui associe un arbre de réduction, noté \mathbb{A}_ω , qui est, par

définition, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathcal{M}_\omega^{(h)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}_\omega^{(j)} & \xrightarrow{E^j} & \mathcal{M}_\omega^{(j-1)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}_\omega^{(0)} = \mathbb{C}^2 \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 D_\omega^{(h)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & D_\omega^{(j)} & \rightarrow & D_\omega^{(j-1)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & D_\omega^{(0)} = 0 \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \Sigma_\omega^{(h)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma_\omega^{(j)} & \rightarrow & \Sigma_\omega^{(j-1)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma_\omega^{(0)} = 0 \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 S_\omega^{(h)} = \emptyset & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S_\omega^{(j)} & \rightarrow & S_\omega^{(j-1)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S_\omega^{(0)} = 0
 \end{array}$$

Donné par :

1. L'application E_ω^j est une application d'éclatement de centre $S_\omega^{(j-1)}$.
2. L'application $E_\omega^{(j)}$ est l'application composée $E_\omega^1 \circ \dots \circ E_\omega^j$.
3. L'espace $\Sigma_\omega^{(j)}$ est le sous-ensemble de $D_\omega^{(j)} = \left(E_\omega^{(j)}\right)^{-1}(0)$ composé des points c qui vérifient l'une de ces conditions :
 - (a) Le point c est un point singulier de $\left(E_\omega^{(j)}\right)^*(\mathcal{F}_\omega)$.
 - (b) Le point c est un point régulier de $\left(E_\omega^{(j)}\right)^*(\mathcal{F}_\omega)$, singulier de $D_\omega^{(j)}$ et la feuille L de $\left(E_\omega^{(j)}\right)^*(\mathcal{F}_\omega)$ qui passe par c n'est pas une composante irréductible locale de $D_\omega^{(j)}$.
 - (c) Le point c est un point régulier de $\left(E_\omega^{(j)}\right)^*(\mathcal{F}_\omega)$ et de $D_\omega^{(j)}$ et la feuille L qui passe par c n'est pas transverse à $D_\omega^{(j)}$ en c .
4. L'espace $S_\omega^{(j)}$ est le sous-ensemble analytique de $D_\omega^{(j)}$ composé des points c de $\Sigma_\omega^{(j)}$ qui vérifient la condition 3.b ou bien la condition 3.c ou bien qui sont une singularité non réduite de $\left(E_\omega^{(j)}\right)^*(\mathcal{F}_\omega)$.
5. L'espace $S_\omega^{(h)}$ est vide.

L'entier h est la hauteur de l'arbre de \mathbb{A}_ω , la variété $\mathcal{M}_\omega^{(0)}$, resp. $\mathcal{M}_\omega^{(h)}$, son socle, resp. sa cime, et les variétés $D_\omega^{(j)}$ les *diviseurs associés*. Nous notons

$$\mathbb{A}_\omega = \left(\mathcal{M}_\omega^{(j)}, D_\omega^{(j)}, \Sigma_\omega^{(j)}, S_\omega^{(j)}, E_\omega^j\right)_{j=1..h}$$

cet arbre et nous convenons que le sextuplet

$$\left(\mathcal{M}_\omega^{(h)}, D_\omega^{(h)}, \Sigma_\omega^{(h)}, S_\omega^{(h)}, E_\omega^{(h)}, \left(E_\omega^{(h)}\right)^*(\mathcal{F}_\omega)\right)$$

se notera dans toute la suite :

$$\left(\mathcal{M}_\omega, D_\omega, \Sigma_\omega, S_\omega, E_\omega, \tilde{\mathcal{F}}_\omega\right).$$

Le théorème de Seidenberg [Sei] assure que cet arbre existe et cette réduction est par construction canonique. Chaque composante irréductible, D_i , du diviseur D_ω est biholomorphe à \mathbb{P}^1 . Soit elle est \mathcal{F}_ω -invariante, soit elle est transverse à

toute feuille du feuilletage qui l'intersecte et, dans ce cas, le feuilletage \mathcal{F}_ω est régulier en chacun de ses points. Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ s'appelle le *feuilletage réduit associé* à \mathcal{F}_ω , l'ensemble Σ_ω s'appelle *l'ensemble des singularités réduites* de la réduction. Nous notons $Comp(D_\omega)$ l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur D_ω et $Sep(\mathcal{F}_\omega)$ l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}_ω . Il y a une ambiguïté dans cette notation. En effet, fixons m un point singulier réduit du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$. D'un point de vue local, si nous considérons le germe de feuilletage au point m , $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega|(\mathcal{M}_\omega, m)}$, celui-ci possède une ou deux séparatrices (selon qu'il est de type noeud-col snc ou pas). Mais d'un point de vue global, m est soit un point régulier du diviseur D_ω (et par m passe au plus la transformée stricte d'une séparatrice de \mathcal{F}_ω) soit en un point singulier du diviseur (et par m ne passe pas de transformée stricte d'une séparatrice de \mathcal{F}_ω). Ces notions dépendent du contexte (local ou global) dans lequel elles sont employées.

Définition 0.2.1 *On appelle germe de recouvrement adapté du germe de variété $(\mathcal{M}_\omega, D_\omega)$ toute famille $\mathcal{U} = (\mathcal{M}_\omega, U_i)_{i \in \Sigma_\omega \cup Comp(D_\omega)}$, où U_i est un ouvert de D_ω et $(\mathcal{M}_\omega, U_i)$ désigne le germe de \mathcal{M}_ω le long de U_i , qui vérifie :*

1. *L'ensemble $(U_i)_{i \in \Sigma_\omega \cup Comp(D_\omega)}$ forme un recouvrement du diviseur D_ω par des ouverts connexes.*
2. *Pour chaque $i \in \Sigma_\omega$, U_i est un voisinage ouvert connexe, contractible de la singularité i , dans D_ω , dont la trace sur chaque composante irréductible du diviseur est homéomorphe à un disque.*
3. *L'ouvert U_i , $i \in Comp(D_\omega)$, est l'ouvert $i - \Sigma_\omega$.*
4. *Pour tout $i, j, k \in \Sigma_\omega \cup Comp(D_\omega)$ distincts, on a $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$.*

A la réduction par désingularisation du feuilletage \mathcal{F}_ω on peut aussi associer son *arbre dual pondéré et fléché* \mathbb{A}_ω^* qui est le graphe construit de la manière suivante :

- A chaque composante irréductible de D_ω on associe biunivoquement un sommet de \mathbb{A}_ω^* . Deux sommets de \mathbb{A}_ω^* sont joints par une arête si, et seulement si, les composantes de D_ω correspondantes s'intersectent.
- On munit un sommet de \mathbb{A}_ω^* d'une flèche pour chaque point singulier de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ qui n'est pas un point singulier de D_ω .
- Les sommets correspondants à une composante dicritique (i.e. non $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ -invariante) de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ portent une double flèche.
- Chaque sommet est pondéré par l'auto-intersection de la composante de D_ω correspondante.

Lorsque, de plus, on rajoute la pondération de chaque sommet par la multiplicité de la composante D_ω correspondante, on note cet arbre \mathbb{A}_ω^\vee . Rappelons que la *multiplicité* d'une composante D du diviseur D_ω est le plus grand entier k tel que $u^{-k}E_\omega^*$ soit holomorphe, où u est un germe, en m , de fonction holomorphe de \mathcal{M}_ω qui désigne une équation réduite locale de la composante D en un point $m \in D$ quelconque.

La *valence* d'un sommet est le nombre de singularités réduites contenues dans la composante de D_ω associée.

Une branche morte de l'arbre dual \mathbb{A}_ω^* est un sous-arbre T de \mathbb{A}_ω^* comportant un unique sommet de valence 1, un unique sommet de valence ≥ 3 tel que l'ensemble T privé du sommet de valence ≥ 3 est connexe. Les sommets de valence respective 1 et ≥ 3 sont les extrémités de la branche morte. Par abus de

langage, on dit que T est une branche p-morte (p pour presque) si dans la définition précédente "sommet de valence 1" est remplacé par "sommet de valence 2 dont la composante associée possède une singularité réduite du feuilletage en un point régulier du diviseur".

Définition 0.2.2 *Un germe de feuilletage singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, \mathcal{F}_ω , non dicritique, est :*

- Appelé *courbe généralisée* si son feuilletage réduit ne possède pas de singularité de type noeud-col.
- Dit *quasi-hyperbolique* si son feuilletage réduit possède uniquement des singularités de type col.
- Dit de \mathcal{L}^∞ espèce s'il vérifie :
 1. ou bien son feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ ne possède pas de singularité de type noeud-col,
 2. ou bien les singularités de type noeud-col du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ sont en des points réguliers du diviseur D_ω et leur séparatrice forte coïncide avec le germe du diviseur en ces points.

0.2.3 Holonomie

Définissons la notion d'holonomie associée à une séparatrice. Considérons un feuilletage \mathcal{F}_v singulier, réduit, en un point m , sur une variété complexe de dimension 2. Supposons que la singularité m est réduite et notons S une séparatrice du feuilletage telle que $m \in \bar{S}$. Prenons un lacet γ plongé dans S et une transversale Σ au feuilletage au point $\gamma(0)$. Considérons un point z de Σ proche de $\gamma(0)$; il existe un chemin Γ_z d'origine z proche du lacet γ , qui est dans la feuille L de \mathcal{F}_v passant par z , tel que $\Gamma_z(1)$ soit dans Σ . On peut voir que l'extrémité $\Gamma_z(1)$ de Γ_z ne dépend pas du choix de Γ_z dans L . L'holonomie du feuilletage \mathcal{F}_v le long du lacet γ est alors le germe d'application $h_\gamma : (\Sigma, \gamma(0)) \rightarrow (\Sigma, \gamma(0))$, $z \mapsto h_\gamma(z) := \Gamma_z(1)$. Cette application ne dépend en fait que de la classe de γ dans $\Pi_1(S, \gamma(0))$.

Considérons un point q de S et une transversale Σ_q au feuilletage au point q . On définit la *représentation d'holonomie de S sur Σ_q* comme la représentation, \mathcal{H}_S , du $\Pi_1(S, q)$ dans le groupe, $Aut(\Sigma_q, q)$, des automorphismes de Σ_q fixant q donné par $\mathcal{H}_S([\gamma]) = h_\gamma$. On note le sous-groupe image de ce morphisme H_S , et on l'appelle *groupe d'holonomie*. Remarquons qu'il suffit de choisir un système de coordonnées sur (Σ, m) pour que chaque h_γ puisse être considéré comme un élément de $Aut(\mathbb{C}, 0)$.

0.3 Déformation de feuilletages

0.3.1 Déformation dont l'espace des paramètres est du type $(\mathbb{C}^p, 0)$

Considérons un germe de feuilletage holomorphe \mathcal{F}_ω singulier à l'origine de $(\mathbb{C}^2, 0)$, défini par un germe de 1-forme $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$. Nous notons $\Lambda_{\mathcal{F}_\omega}$ le sous-faisceau de $\Lambda_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1$ engendré par ω , où $\Lambda_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1$ le faisceau des germes de 1-formes différentielles sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. Considérons P le germe $(\mathbb{C}^p, 0)$ et $t = (t_1, \dots, t_p)$ les coordonnées canoniques sur P .

Définition 0.3.1 *Un germe de déformation analytique de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P , est la donnée d'un germe de sous-module Λ_η de $\Lambda_{(\mathbb{C}^{p+2}, 0)}^1$ généré*

par les germes de 1-formes $\{dt_1, \dots, dt_p\}$ ainsi que par le germe d'une 1-forme différentielle η du type $A(x, y, t) dx + B(x, y, t) dy$ avec $A, B \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^{p+2}, 0)}$ telle que $A(x, y, 0) = a(x, y)$, $B(x, y, 0) = b(x, y)$ et $A(0, 0, t) = B(0, 0, t) = 0$, pour tout $t \in P$.

Le feuilletage \mathcal{F}_η défini par Λ_η est un feuilletage de dimension 1 sur $(\mathbb{C}^{p+2}, 0)$. On considère la projection π_η de $(\mathbb{C}^{p+2}, 0)$ sur l'espace des paramètres P . La restriction de η à $\pi_\eta^{-1}(t)$, où $t \in P$, se note η_t et définit un feuilletage \mathcal{F}_{η_t} de dimension 1 sur $\pi_\eta^{-1}(t)$.

Définition 0.3.2 *Un germe de déformation analytique \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P est équiréductible s'il existe une succession finie d'éclatements $E_\eta^i : \mathcal{M}_\eta^{(i)} \rightarrow \mathcal{M}_\eta^{(i-1)}$ telle que :*

1. chaque E_η^i est un éclatement de centre une sous-variété lisse $S_\eta^{(i-1)} \subset \mathcal{M}_\eta^{(i-1)}$ de codimension 2, non nécessairement connexe,
2. les variétés $\Sigma_\eta^{(i)}$ et $S_\eta^{(i)}$ sont lisses et étales via $\Pi_\eta^{(i)}$ au dessus de P et sont contenues dans $D_\eta^{(i)}$,
3. pour tout $t \in P$, la succession d'éclatements obtenue par restriction de chaque E_η^i aux fibres $\Pi_\eta^{(i)}$ et $\Pi_\eta^{(i-1)}$ est exactement la succession d'éclatements de la réduction du feuilletage \mathcal{F}_{η_t} .

Nous avons utilisé, dans cette définition, les notations suivantes :

- Nous notons $E_\eta^{(i)}$ l'application $E_\eta^1 \circ \dots \circ E_\eta^i$, $D_\eta^{(i)}$ la variété $(E_\eta^{(i)})^{-1}(0 \times P)$, η_i le germe de 1-forme $(E_\eta^{(i)})^{-1}(\eta)$ et $\Pi_\eta^{(i)}$ la projection $\pi_\eta \circ E_\eta^{(i)}$.
- L'ensemble $\Sigma_\eta^{(i)}$ est l'ensemble des points de $D_\eta^{(i)}$ qui vérifient :
 - Soit m est un point singulier de η_i (i.e. $m \in \text{Sing}(\eta_i)$).
 - Soit m est un point régulier de η_i , la composante irréductible de $D_\eta^{(i)}$ contenant m n'est pas \mathcal{F}_{η_i} -invariante et la feuille qui passe par m est tangente à $D_\eta^{(i)}$ (i.e. $m \notin \text{Sing}(\eta_i)$, $\eta_i|_{D_\eta^{(i)}} \neq 0$, $\eta_i|_{D_\eta^{(i)}}(m) = 0$).
- Le couple $(\eta_i, D_\eta^{(i)})$ est dit réduit en m si soit η_i est réduit en m et la composante irréductible de $D_\eta^{(i)}$ contenant m est \mathcal{F}_{η_i} -invariante, soit η_i ne s'annule pas en m et m n'appartient pas à $\Sigma_\eta^{(i)}$.
- L'ensemble $S_\eta^{(i)}$ se compose des points m de $D_\eta^{(i)}$ où le couple $(\eta_i, D_\eta^{(i)})$ n'est pas réduit.

Une déformation équiréductible est, en quelque sorte, une déformation qui se désingularise "en famille". L'arbre de réduction associé à la déformation équiréductible \mathcal{F}_η est le diagramme commutatif

$$\mathbb{A}_\eta = \left(\mathcal{M}_\eta^{(j)}, D_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)}, E_\eta^j \right)_{j=1..h}.$$

Il vérifie pour tout $t \in P$ que le diagramme

$$\left(\left(\mathcal{M}_\eta^{(j)}, D_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)}, E_\eta^j \right) \cap \left(\Pi_\eta^{(j)} \right)^{-1}(t) \right)_{j=1..h}$$

est exactement l'arbre de réduction \mathbb{A}_{η_t} . L'ensemble

$$\left(\mathcal{M}_\eta^{(h)}, D_\eta^{(h)}, \Sigma_\eta^{(h)}, S_\eta^{(h)}, E_\eta^{(h)}, \Pi_\eta^{(j)}, \mathcal{F}_\eta^{(h)} \right)$$

se notera dans toute la suite :

$$\left(\mathcal{M}_\eta, D_\eta, \Sigma_\eta, S_\eta, E_\eta, \Pi_\eta, \tilde{\mathcal{F}}_\eta \right).$$

Nous convenons de noter $Comp(D_\eta)$ l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur D_η .

Définition 0.3.3 *Le germe de la déformation constante de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P , est la donnée du germe de sous-module $\Lambda_{\omega \times P}$ de $\Lambda_{(\mathbb{C}^{p+2}, 0)}^1$ généré par les 1-formes $\{pr^*(\omega), dt_1, \dots, dt_p\}$ où $pr : (\mathbb{C}^{p+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est la projection canonique. On note cette déformation $\mathcal{F}_\omega^{cste}$ et son arbre de réduction*

$$\mathbb{A}_\omega^{cste} = \left(\mathcal{M}_\omega \times P, D_\omega \times P, \Sigma_\omega \times P, S_\omega \times P, E_\omega^{cste}, \Pi_\omega^{cste}, \tilde{\mathcal{F}}_\omega^{cste} \right)$$

Définition 0.3.4 *Un germe de déformation analytique équiréductible \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P , est SL -équisingulier s'il vérifie les assertions suivantes :*

1. *Pour tout point c de Σ_{η_0} , il existe un germe de biholomorphisme $\Phi_c : (\mathcal{M}_\eta, c) \rightarrow (\mathcal{M}_\omega \times P, c \times 0)$ qui commute aux projections, $\Pi_\eta = \Pi_\omega^{cste} \circ \Phi_c$, et conjugue les germes de feuilletages $(\tilde{\mathcal{F}}_\eta, c)$, $(\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{cste}, c \times 0)$.*
2. *Pour toute composante irréductible D du diviseur D_{η_0} , il existe un germe de biholomorphisme $\Phi_D : (\mathcal{M}_\eta, \mathring{D} = D - (\Sigma_{\eta_0} \cap D)) \rightarrow (\mathcal{M}_\omega \times P, \mathring{D} \times 0)$ qui commute aux projections, $\Pi_\eta = \Pi_\omega^{cste} \circ \Phi_D$, et conjugue les germes de feuilletages $(\tilde{\mathcal{F}}_\eta, \mathring{D})$, $(\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{cste}, \mathring{D} \times 0)$.*

Définition 0.3.5 *Deux germes de déformation analytique \mathcal{F}_η et $\mathcal{F}_{\eta'}$ de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P sont \mathcal{C}^n -conjugués, resp. holomorphiquement conjugués, s'il existe un germe de \mathcal{C}^n -difféomorphisme, resp. biholomorphisme, $\Phi : (\mathbb{C}^{2+p}, 0 \times P) \rightarrow (\mathbb{C}^{2+p}, 0 \times P)$ qui conjugue les feuilletages \mathcal{F}_η et $\mathcal{F}_{\eta'}$, commute aux projections $\pi_\eta, \pi_{\eta'}$ et dont la fibre en 0 est l'identité ($\Phi|_{\pi_\eta^{-1}(0)} = id$).*

Un germe de déformation analytique équiréductible \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P est \mathcal{C}^n -trivial, resp. holomorphiquement trivial, si il est \mathcal{C}^n -conjugué, resp. holomorphiquement conjugué, à la déformation constante, $\mathcal{F}_\omega^{cste}$. Le morphisme de conjugaison est alors appelé *morphisme de trivialisation*.

Un germe de déformation analytique équiréductible \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P a un feuilletage réduit \mathcal{C}^n -triviale, resp. holomorphiquement triviale, s'il existe un germe de \mathcal{C}^n -difféomorphisme, resp. biholomorphisme, $\Phi : (\mathcal{M}_\eta, D_\eta) \rightarrow (\mathcal{M}_\omega \times P, D_\omega \times P)$ qui conjugue les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_\eta$ et $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{cste}$, les lieux singuliers Σ_η et $\Sigma_\omega \times P$, qui commute aux projections $\Pi_\eta, \Pi_\omega^{cste}$ et dont la fibre en 0 est l'identité ($\Phi|_{\Pi_\eta^{-1}(0)} = id$).

On remarque que si \mathcal{F}_η a un feuilletage réduit \mathcal{C}^∞ -triviale, resp. holomorphiquement triviale, alors \mathcal{F}_η est \mathcal{C}^0 -triviale, resp. holomorphiquement triviale.

0.3.2 Déformation dont l'espace des paramètres est du type $(\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un compact de \mathbb{C}^p .

Abordons le cas où l'espace des paramètres P n'est plus germifié en un point mais sur un compact. Nous posons, dans tout ce paragraphe, $P = (\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un compact de \mathbb{C}^p .

Définition 0.3.6 *Un germe de déformation analytique de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P , est la donnée d'un faisceau de sous-modules Λ_η de $\Lambda_{(\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K})}^1$ défini comme suit. Considérons $\tilde{\Lambda}_\eta$ le sous-faisceau de $\Lambda_{\mathbb{C}^{p+2}}^1$ engendré par les 1-formes $\{dt_1, \dots, dt_p\}$ ainsi que par une 1-forme différentielle η du type $A(x, y, t) dx + B(x, y, t) dy$ avec $A, B \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p+2}}$ telle que $A(x, y, 0) = a(x, y)$, $B(x, y, 0) = b(x, y)$ et $A(0, 0, t) = B(0, 0, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{C}^p$. Notons $\iota : (\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K}) \hookrightarrow \mathbb{C}^{p+2}$ le plongement canonique. Le sous-faisceau Λ_η est alors défini comme étant $\iota^{-1}(\tilde{\Lambda}_\eta)$.*

Le feuilletage \mathcal{F}_η défini par Λ_η est un germe, le long de \mathcal{K} , de feuilletage holomorphe de \mathbb{C}^{p+2} de dimension 1. Notons π_η la projection de $(\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K})$ sur l'espace des paramètres $P = (\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$. La restriction de η à $\pi_\eta^{-1}(t)$, où $t \in P$, se note η_t et définit un germe de feuilletage \mathcal{F}_{η_t} de dimension 1 sur $\pi_\eta^{-1}(t) = (\mathbb{C}^2 \times \{t\}, 0 \times \{t\})$.

Définition 0.3.7 *Un germe de déformation analytique \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P est équiréductible (resp. SL -équisingulier) si pour tout $(0, \tilde{t}) \in 0 \times \mathcal{K}$, le germe, au point $(0, \tilde{t})$, du feuilletage \mathcal{F}_η définit un germe de déformation analytique $\mathcal{F}_{\eta_{\tilde{t}}}$ de paramètre $(\mathbb{C}^p, \tilde{t})$ qui est équiréductible (resp. SL -équisingulier).*

Lorsque \mathcal{F}_η est équiréductible, il s'ensuit l'existence d'un *arbre de résolution* global \mathbb{A}_η qui est, par définition, le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{M}_\eta^{(h)}, \mathcal{K}_\eta^{(h)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (\mathcal{M}_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}) & \xrightarrow{E_\eta^j} \\
 \uparrow & & & & \uparrow & \\
 (D_\eta^{(h)}, \mathcal{K}_\eta^{(h)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (D_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}) & \rightarrow \\
 \uparrow & & & & \uparrow & \\
 (\Sigma_\eta^{(h)}, \Sigma_\eta^{(h)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(h)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (\Sigma_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)}) & \rightarrow \\
 \uparrow & & & & \uparrow & \\
 (S_\eta^{(h)}, S_\eta^{(h)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(h)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (S_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)}) & \rightarrow \\
 \\
 \xrightarrow{E_\eta^j} & (\mathcal{M}_\eta^{(j-1)}, \mathcal{K}_\eta^{(j-1)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (\mathcal{M}_\eta^{(0)}, \mathcal{K}_\eta^{(0)}) = (\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K}) \\
 & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \rightarrow & (D_\eta^{(j-1)}, \mathcal{K}_\eta^{(j-1)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (D_\eta^{(0)}, \mathcal{K}_\eta^{(0)}) = (0 \times \mathbb{C}^p, 0 \times \mathcal{K}) \\
 & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \rightarrow & (\Sigma_\eta^{(j-1)}, \Sigma_\eta^{(j-1)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j-1)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (\Sigma_\eta^{(0)}, \mathcal{K}_\eta^{(0)}) = (0 \times \mathbb{C}^p, 0 \times \mathcal{K}) \\
 & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \rightarrow & (S_\eta^{(j-1)}, S_\eta^{(j-1)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j-1)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (S_\eta^{(0)}, \mathcal{K}_\eta^{(0)}) = (0 \times \mathbb{C}^p, 0 \times \mathcal{K})
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, $E_\eta^j : (\mathcal{M}_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}) \rightarrow (\mathcal{M}_\eta^{(j-1)}, \mathcal{K}_\eta^{(j-1)})$ est le germe, le long de $\mathcal{K}_\eta^{(j-1)}$, de l'application d'éclatement de centre $S_\eta^{(j-1)}$. Cette application d'éclatement germifié sur un compact se construit comme suit : Considérons un voisinage U de $(0 \times \mathcal{K})$ dans \mathbb{C}^{p+2} , ainsi que l'application d'éclatement $\tilde{E} : \mathcal{M}^1 \rightarrow U$ de centre $(0 \times \mathbb{C}^{p+2} \cap U)$. Notons $\mathcal{K}^{(1)}$ la préimage de $(0 \times \mathcal{K})$ par cette application. On définit l'application d'éclatement germifié sur $\mathcal{K}^{(1)}$, $E^{(1)} : (\mathcal{M}^1, \mathcal{K}^{(1)}) \rightarrow (\mathbb{C}^{p+2}, \mathcal{K})$ de centre $(0 \times \mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K})$ comme étant l'application \tilde{E} germifié en $\mathcal{K}^{(1)}$. On définit de la même manière l'application d'éclatement germifié sur $\mathcal{K}^{(j)}$, $E^{(j)} : (\mathcal{M}^{(j)}, \mathcal{K}^{(j)}) \rightarrow (\mathcal{M}^{(j-1)}, \mathcal{K}^{(j-1)})$ de centre $(S^{(j-1)}, S^{(j-1)} \cap \mathcal{K}^{(j-1)})$ où $S^{(j-1)}$ est une variété de codimension 2. Notons $E_\eta^{(i)} = E_\eta^1 \circ \dots \circ E_\eta^i$ et $\Pi_\eta^{(i)} = \pi_\eta \circ E_\eta^{(i)}$.

De plus, les définitions des espaces $\Sigma_\eta^{(j)}$ et $S_\eta^{(j)}$, dans l'arbre de résolution \mathbb{A}_η , sont les suivantes :

1. L'espace $\Sigma_\eta^{(j)}$ est le sous-ensemble de $D_\eta^{(j)}$ composé de l'ensemble des points c qui vérifient l'une de ces conditions :
 - (a) Le point c est un point singulier de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$.
 - (b) Le point c est un point régulier de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$, singulier de $D_\eta^{(j)}$ et la feuille L de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$ qui passe par c n'est pas contenue dans une composante irréductible locale de $D_\eta^{(j)}$.
 - (c) Le point c est un point régulier de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$ et de $D_\eta^{(j)}$ et la feuille L qui passe par c n'est pas transverse à $D_\eta^{(j)}$ en c .
2. L'espace $S_\eta^{(j)}$ est le sous-ensemble analytique de $D_\eta^{(j)}$ composé des points c de $\Sigma_\eta^{(j)}$ qui vérifient la condition 5.b, ou bien la condition 5.c ou bien qui sont une singularité non réduite de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)|_{(\Pi_\eta^{(i)})^{-1}(\Pi_\eta^{(i)}(c))}$.

Enfin, toujours dans ce diagramme, les assertions suivantes sont réalisées :

1. Les germes $(\Sigma_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)})$ et $(S_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)})$ sont lisses et étales via $\Pi_\eta^{(i)}$ au-dessus de P .
2. Pour tout point $t \in 0 \times \mathcal{K}$, la succession d'éclatements obtenue par restriction de chaque E_η^i aux fibres $\Pi_\eta^{(i)}$ et $\Pi_\eta^{(i-1)}$ est exactement la succession d'éclatements de la réduction du feuilletage \mathcal{F}_{η_t} .
3. L'espace $S_\eta^{(h)}$ est vide.

L'arbre de réduction associé à la déformation équiréductible \mathcal{F}_η se note

$$\mathbb{A}_\eta = \left((\mathcal{M}_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}), (D_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}), (\Sigma_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)}), (S_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)}), E_\eta^i \right)_{j=1..h}.$$

Nous nous permettons, lorsque le contexte est clair, de le noter

$$\mathbb{A}_\eta = \left(\mathcal{M}_\eta^{(j)}, D_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)}, E_\eta^i \right)_{j=1..h},$$

de même nous noterons

$$\left(\mathcal{M}_\eta^{(h)}, D_\eta^{(h)}, \mathcal{K}_\eta^{(h)}, \Sigma_\eta^{(h)}, S_\eta^{(h)}, E_\eta^{(h)}, \Pi_\eta^{(h)}, \left(E_\eta^{(h)} \right)^* (\mathcal{F}_\eta) \right)$$

par

$$\left(\mathcal{M}_\eta, D_\eta, \mathcal{K}_\eta, \Sigma_\eta, S_\eta, E_\eta, \Pi_\eta, \tilde{\mathcal{F}}_\eta \right).$$

0.4 Déploiement de feuilletages

0.4.1 Déploiement dont l'espace des paramètres est du type $(\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un compact de \mathbb{C}^p .

Considérons un germe de feuilletage holomorphe \mathcal{F}_ω singulier à l'origine de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par un germe de 1-forme $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$. Considérons P le germe $(\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ et $t = (t_1, \dots, t_p)$ les coordonnées canoniques sur P . Comme dans le cadre des déformations, nous définissons quelques notions sur les déploiements dont la base $P = (\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ est un germe de \mathbb{C}^p le long d'un compact. Dans ce paragraphe, le compact \mathcal{K} peut être considéré de dimension zéro.

Définition 0.4.1 *Un germe de déploiement analytique de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$ de paramètre $P = (\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ est une 1-forme holomorphe*

$$\eta = A(x, y, t)dx + B(x, y, t)dy + \sum_{j=1}^p C_j(x, y, t)dt_j$$

avec A, B, C_i appartenant à l'anneau, $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K})}$, des germes, le long de \mathcal{K} , de fonction holomorphe telle que la condition d'intégrabilité $\eta \wedge d\eta = 0$ soit réalisée et qui vérifie :

1. Les germes en tout point m de $0 \times \mathcal{K}$ des sous-ensembles

$$\{A = B = 0\}$$

et

$$\{A = B = C_1 = \dots = C_p = 0\}$$

sont égaux à $(m \times \mathbb{C}^p, m)$.

2. L'idéal (C_1, \dots, C_p) est inclus dans l'idéal $\sqrt{(A, B)}$.
3. Les égalités suivantes sont vérifiées : $A(x, y, 0) = a(x, y)$, $B(x, y, 0) = b(x, y)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $C_i(x, y, 0) = 0$.

Notons $\pi_\eta : (\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ la projection canonique de l'espace de déformation sur l'espace des paramètres. Le feuilletage \mathcal{F}_η , défini par η , est un germe, le long de $0 \times \mathcal{K}$, de feuilletage holomorphe de codimension 1 sur \mathbb{C}^{p+2} et est transverse aux fibres de la projection π_η . On note $\mathcal{F}_{\eta_{t_0}}$, $t_0 \in P$, le feuilletage holomorphe, de dimension 1, défini sur $\pi_\eta^{-1}(t_0) = (\mathbb{C}^2 \times t_0, 0 \times t_0)$ par $\eta_{t_0} = A(x, y, t_0)dx + B(x, y, t_0)dy + \sum_{j=1}^p C_j(x, y, t_0)dt_j$. Nous remarquons que $\mathcal{F}_{\eta_0} = \mathcal{F}_\omega$.

Définition 0.4.2 *Dans le cas où $\mathcal{K} = \{0\}$, un germe de déploiement analytique \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times (\mathbb{C}^p, 0)$, de paramètre $(\mathbb{C}^p, 0)$, est équisingulier si*

- (c) Le point c est un point régulier de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$ et de $D_\eta^{(j)}$ et la feuille L qui passe par c n'est pas transverse à $D_\eta^{(j)}$ en c .
2. L'espace $S_\eta^{(j)}$ est le sous-ensemble analytique de $D_\eta^{(j)}$ composé des points c de $\Sigma_\eta^{(j)}$ qui vérifient la condition 3.b, ou bien la condition 3.c ou bien qui sont une singularité non réduite de $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$.

Enfin, au sein de ce diagramme, les conditions suivantes sont réalisées :

1. Les ensembles singuliers $\Sigma_\eta^{(j)}$ sont lisses, les centres $S_\eta^{(j)}$ sont constitués de composantes irréductibles des $\Sigma_\eta^{(j)}$; $S_\eta^{(h)} = \emptyset$.
2. Les restrictions des $\Pi_\eta^{(j)}$ aux $\Sigma_\eta^{(j)}$ sont des étalements, où $\Pi_\eta^{(i)} = \pi_\eta \circ E_\eta^{(i)}$.
3. Les feuilles, aux points réguliers du feuilletage¹³ $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$ sont transverses aux fibres de $\Pi_\eta^{(j)}$.
4. Pour tout $t \in 0 \times \mathcal{K}$, la succession d'éclatements obtenue par restriction de $E_\eta^{(j)}$ aux fibres $\Pi_\eta^{(j)}$ et $\Pi_\eta^{(j-1)}$ est la succession d'éclatements de la réduction de \mathcal{F}_{η_t} .

L'arbre de résolution associé au déploiement équisingulier \mathcal{F}_η se note

$$\mathbb{A}_\eta = \left((\mathcal{M}_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}), (D_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}), (\Sigma_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)}), (S_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)} \cap \mathcal{K}_\eta^{(j)}), E_\eta^{(j)} \right)_{j=1..h}.$$

Nous nous permettons, lorsque le contexte est clair, de le noter

$$\mathbb{A}_\eta = \left(\mathcal{M}_\eta^{(j)}, D_\eta^{(j)}, \mathcal{K}_\eta^{(j)}, \Sigma_\eta^{(j)}, S_\eta^{(j)}, E_\eta^{(j)} \right)_{j=1..h},$$

de même nous noterons

$$\left(\mathcal{M}_\eta^{(h)}, D_\eta^{(h)}, \mathcal{K}_\eta^{(h)}, \Sigma_\eta^{(h)}, S_\eta^{(h)}, E_\eta^{(h)}, \Pi_\eta^{(h)}, (E_\eta^{(h)})^*(\mathcal{F}_\eta) \right)$$

par

$$\left(\mathcal{M}_\eta, D_\eta, \mathcal{K}_\eta, \Sigma_\eta, S_\eta, E_\eta, \Pi_\eta, \tilde{\mathcal{F}}_\eta \right).$$

Deux germes de déploiement analytique \mathcal{F}_η et $\mathcal{F}_{\eta'}$ de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$, de paramètre P , sont *holomorphiquement conjugués* s'il existe un germe d'automorphisme Φ de $(\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K})$ qui transforme les feuilles de \mathcal{F}_η en les feuilles de $\mathcal{F}_{\eta'}$ qui commute aux projections : $\pi_\eta \circ \Phi = \pi_{\eta'}$. on écrira alors $\Phi^* \mathcal{F}_\eta = \mathcal{F}_{\eta'}$. Lorsque Φ est seulement un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k , les déploiements \mathcal{F}_η et $\mathcal{F}_{\eta'}$ sont \mathcal{C}^k -conjugués.

Définition 0.4.4 *Un germe de déploiement analytique \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω de paramètre P est trivial s'il est holomorphiquement conjugué au déploiement constant $\mathcal{F}_\omega \times P$ i.e. défini par le germe de 1-forme $pr^*(\omega)$ où $pr : (\mathbb{C}^{p+2}, 0 \times \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est la projection canonique.*

Lorsque $\mathcal{K} = \{0\}$, nous avons la proposition suivante, due à Mattei [Mat₁] :

¹³ On rappelle que $(E_\eta^{(j)})^*(\mathcal{F}_\eta)$ désigne la transformée stricte du feuilletage \mathcal{F}_η par l'application $E_\eta^{(j)}$.

Proposition 0.4.5 *Soit \mathcal{F}_η un germe de déploiement équisingulier de \mathcal{F}_ω le long de $(0 \times \mathbb{C}^p, 0 \times 0)$ de paramètre $(\mathbb{C}^p, 0)$. Alors $\tilde{\mathcal{F}}_\eta$ est localement trivial; il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ du diviseur D_ω de \mathcal{M}_ω tel que $\tilde{\mathcal{F}}_\eta$ soit trivial, suivant $(\mathbb{C}^p, 0)$, le long de chaque ouvert $U_i \subset D_\omega$.*

Tout germe de déploiement de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$ induit, par restriction, une déformation de \mathcal{F}_ω le long de $0 \times P$.

De même, un germe de déploiement équisingulier \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_ω de base $P = (\mathbb{C}^p, \mathcal{K})$ induit un germe de déformation SL-équisingulier. En effet, tout déploiement équisingulier étant localement trivial, l'existence des germes de biholomorphisme Φ_c et Φ_D de la définition de déformation SL-équisingulière (page 31) est immédiate.

...

1 Singularités marquées et Résultats principaux.

Nous définissons, dans ce chapitre, les notions essentielles, concernant les germes de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, spécifiques à la problématique rencontrée dans cette Thèse. Nous commençons par la notion de feuilletage marqué qui est nécessaire à la compréhension de notre problème. Nous donnons ensuite les définitions de la SL-équivalence, de la SL-reliabilité et du SL-cobordisme entre deux feuilletages marqués. Puis nous énonçons les deux Théorèmes principaux de cette Thèse.

Nous notons $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$ l'espace des paramètres. Nous dirons qu'une propriété relative à des déformations (des déploiements) de feuilletage de paramètre P est vraie pour $t \in P$ si elle est satisfaite chaque fois que l'on germifie la déformation (le déploiement) en un point t d'un voisinage de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} .

1.1 Notion de prémarquage d'un feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine

Définition 1.1.1 Soit \mathcal{F}_ϖ un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_ϖ sera un triplet $\mathcal{F}_\omega^P = (\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$ composé :

1. d'un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, \mathcal{F}_ω ,
2. d'une bijection $\Lambda_\omega : \text{Comp}(D_\varpi) \rightarrow \text{Comp}(D_\omega)$ qui vérifie les égalités des indices d'intersections : $\langle D, D' \rangle = \langle \Lambda_\omega(D), \Lambda_\omega(D') \rangle$, $D, D' \in D_\omega$,
3. d'une bijection $\sigma_\omega : \Sigma_\varpi \rightarrow \Sigma_\omega$ vérifiant si $m \in D \cap \Sigma_\varpi$, avec $D \in \text{Comp}(D_\varpi)$, alors $\sigma_\omega(m) \in \Lambda_\omega(D) \cap \Sigma_\omega$.

On sait que l'existence des bijections Λ_ω et σ_ω vérifiant (2) et (3) est équivalente à l'égalité des arbres duaux pondérés par auto-intersection. Elle est aussi équivalente à l'existence d'un germe d'homéomorphisme $\varphi : (\mathcal{M}_\varpi, D_\varpi) \rightarrow (\mathcal{M}_\omega, D_\omega)$ qui vérifie $\varphi(\Sigma_\varpi) = \Sigma_\omega$ et $\varphi(D) = \Lambda_\omega(D)$, $D \in \text{Comp}(D_\varpi)$.

Remarque 1.1.2 Si $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$ est un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_ϖ et si $(\mathcal{F}_{\omega'}, \Lambda_{\omega'}, \sigma_{\omega'})$ est un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_ω , alors le triplet $(\mathcal{F}_{\omega'}, \Lambda_{\omega'} \circ \Lambda_\omega, \sigma_{\omega'} \circ \sigma_\omega)$ est un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_ϖ .

Considérons deux germes de feuilletage, $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$ et $(\mathcal{F}_{\omega'}, \Lambda_{\omega'}, \sigma_{\omega'})$, prémarqués par \mathcal{F}_ϖ . Nous dirons qu'une application $H : (\mathcal{M}_\omega, D_\omega) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega'}, D_{\omega'})$ qui conjugue les germes de feuilletage, $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}$, resp. une application $H : D_\omega \rightarrow D_{\omega'}$, est compatible avec (ou respecte) le prémarquage si elle vérifie pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, tout $i \in \Sigma_{\omega_0}$, les égalités $H \circ \Lambda_\omega(D) = \Lambda_{\omega'}(D)$ et $H \circ \sigma_\omega(i) = \sigma_{\omega'}(i)$.

Définition 1.1.3 Soient \mathcal{F}_ϖ , \mathcal{F}_ω deux feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers à l'origine. Nous appelons déformation équiréductible de paramètre P , prémarquée par \mathcal{F}_ϖ , un triplet $\mathcal{F}_\eta^P = (\mathcal{F}_\eta, \Lambda_\eta, \sigma_\eta)$ composé :

1. d'une déformation équiréductible¹⁴ \mathcal{F}_η de paramètre P de \mathcal{F}_ω ,

¹⁴Cf. § 0.3.

2. d'une bijection $\Lambda_\eta : \text{Comp}(D_\infty) \rightarrow \text{Comp}(D_\eta)$ telle que pour chaque¹⁵ $t \in P$, et pour chaque couple de composante D, D' de D_∞ on a égalité des indices d'intersections : $\langle D, D' \rangle = \langle \Lambda_\eta(D) \cap \Pi_\eta^{-1}(t), \Lambda_\eta(D') \cap \Pi_\eta^{-1}(t) \rangle$,
3. d'une bijection $\sigma_\eta : \Sigma_\infty \rightarrow \text{Comp}(\Sigma_\eta)$ vérifiant : si $m \in D \cap \Sigma_\infty$, avec $D \in \text{Comp}(D_\infty)$, alors $\sigma_\eta(m) \subset \Lambda_\eta(D) \cap \Sigma_\eta$.

Par restriction, un prémarquage de la déformation \mathcal{F}_η induit visiblement un prémarquage de chaque \mathcal{F}_{η_t} , pour $t \in [0, 1]$. Il suffit de considérer les bijections :

$$\Lambda_{\eta_t} : \begin{array}{ccc} \text{Comp}(D_\infty) & \rightarrow & \text{Comp}(D_{\eta_t}) \\ D & \rightarrow & \Lambda_\eta(D) \cap \Pi_\eta^{-1}(t) \end{array}$$

et

$$\sigma_{\eta_t} : \begin{array}{ccc} \Sigma_\infty & \rightarrow & \Sigma_{\tilde{\eta}_t} \\ m & \rightarrow & \sigma_\eta(m) \cap \Pi_\eta^{-1}(t) \end{array} .$$

Réciproquement, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.1.4 *Considérons un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_∞ , $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$. Alors toute déformation équiréductible \mathcal{F}_η , de base P , de \mathcal{F}_ω est munie d'un prémarquage canonique induit par le prémarquage de \mathcal{F}_ω .*

Preuve. L'espace de déformation \mathcal{M}_η de la déformation \mathcal{F}_η est \mathcal{C}^∞ -triviale. Il existe un germe de \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme

$$\mathcal{H} : (\mathcal{M}_\omega \times P, D_\omega \times [0, 1]) \rightarrow (\mathcal{M}_\eta, D_\eta)$$

tel que $\mathcal{H}(D_\omega \times P) = D_\eta$ et $\mathcal{H}(\Sigma_\omega \times P) = \Sigma_\eta$. Notons $H = \mathcal{H}|_{D_\omega \times P} : D_\omega \times P \rightarrow D_\eta$ la restriction de \mathcal{H} à $D_\omega \times P$. Pour tout $t \in P$, le difféomorphisme $H_t = H(\cdot, t)$ induit deux bijections $\Lambda_{\eta_t} : \text{Comp}(D_\omega) \rightarrow \text{Comp}(D_{\eta_t})$, $D \mapsto H_t(D)$ et $\sigma_{\eta_t} : \Sigma_\omega \rightarrow \Sigma_{\eta_t}$ où $\sigma_{\eta_t} = H_t|_{\Sigma_\omega}$. Trivialement, les bijections Λ_{η_t} et σ_{η_t} ne dépendent pas du choix de la trivialisatation et satisfont la définition 1.1.1. Ainsi, pour tout $t \in P$, le triplet $(\mathcal{F}_{\eta_t}, \Lambda_{\eta_t}, \sigma_{\eta_t})$ est un feuilletage prémarqué par ω et nous constatons que les bijections Λ_{η_t} et σ_{η_t} dépendent continûment du paramètre t . ■

Pour mieux comprendre la notion de prémarquage, nous l'appliquons, dans l'exemple suivant, au double cusp :

Exemple 1.1.5 Ici, on aura $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\omega$. Tout germe d'automorphisme Φ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui laisse \mathcal{F}_ω invariant se relève en un germe, le long de D_ω , d'automorphisme de \mathcal{M}_ω qui laisse $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ invariant. Il induit ainsi un prémarquage de \mathcal{F}_ω par lui-même. L'exemple que nous décrivons ici est celui du double cusp $\omega = d((y^2 - x^3)(y^3 - x^2))$. La cime de l'arbre de résolution de ω se représente graphiquement (cf figure 1) avec

$$\{S_1\} = \overline{E_\omega^{-1}(\{y^2 - x^3 = 0\})} - D_\omega, \{S_2\} = \overline{E_\omega^{-1}(\{y^3 - x^2 = 0\})} - D_\omega, \\ \Sigma_\omega = \{s_1, \dots, s_6\}$$

¹⁵Dans cette condition, on peut remplacer la phrase pour "chaque $t \in P$ " par pour "un $t \in P$ ".

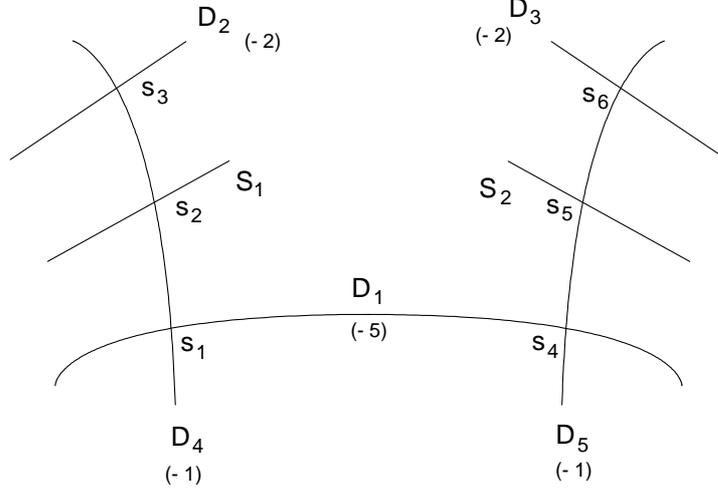


FIG. 1 – Arbre de résolution du double cusp pondéré par auto-intersection des composantes.

Les composantes irréductibles de D_ω sont les sous-variétés D_1, \dots, D_5 . Les indices d'intersection de ces variétés sont les suivants $\langle D_i, D_i \rangle = \begin{cases} -5 & \text{si } i = 1 \\ -2 & \text{si } i = 2, 3 \\ -1 & \text{si } i = 4, 5 \end{cases}$

et $\langle D_i, D_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } D_i \cap D_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } D_i \cap D_j = \emptyset \end{cases}$. Considérons le prémarquage de \mathcal{F}_ω par lui-même défini par les applications identité $\Lambda : \text{Comp}(D_\omega) \rightarrow \text{Comp}(D_\omega)$ et $\sigma : \Sigma_\omega \rightarrow \Sigma_\omega$. Notons Ψ l'automorphisme de symétrie par rapport à la diagonale de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui inverse les axes : $(x, y) \rightarrow (y, x)$. C'est un automorphisme du feuilletage \mathcal{F}_ω . Il se relève donc en un automorphisme de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ sur M_ω et induit ainsi un nouveau prémarquage (Λ^1, σ^1) de \mathcal{F}_ω par lui-même ;

$$\begin{aligned} \Lambda^1 & : \text{Comp}(D_\omega) \rightarrow \text{Comp}(D_\omega), \\ D_1 & \mapsto D_1, D_2 \mapsto D_3, D_3 \mapsto D_2, D_4 \mapsto D_5, D_5 \mapsto D_4 \end{aligned}$$

et par

$$\begin{aligned} \sigma^1 & : \Sigma_\omega \rightarrow \Sigma_\omega, \\ s_i & \mapsto s_{i+3} \text{ si } i \leq 3, s_i \mapsto s_{i-3} \text{ si } i \geq 3. \end{aligned}$$

Les feuilletages prémarqués $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda, \sigma)$ et $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda^1, \sigma^1)$ sont maintenant distingués. On peut donc se poser la question suivante : existe-t-il une déformation, $(\mathcal{F}_\eta, \Lambda_\eta, \sigma_\eta)$, équiréductible de $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda, \sigma)$, de paramètre $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, prémarquée par \mathcal{F}_ω , telle que $(\mathcal{F}_{\eta_1}, \Lambda_{\eta_1}, \sigma_{\eta_1}) = (\mathcal{F}_\omega, \Lambda^1, \sigma^1)$? Cette problématique correspond à la question intuitive : existe-t-il une déformation équiréductible au cours de laquelle les deux cusps séparatrices $\{(y^2 - x^3) = 0\}$, $\{(y^3 - x^2) = 0\}$ sont échangés ? Sur cet exemple précis la réponse est visiblement positive : l'automorphisme linéaire Ψ qui conjugue \mathcal{F}_ω à lui-même est homotope à l'identité

dans $GL(2, \mathbb{C})$ via l'application $\Psi_t \in GL(2, \mathbb{C})$, $\Psi_0 = id$, $\Psi_1 = \Psi$. La déformation $\omega_t = \Psi_t^* \omega$ convient. Cependant, on peut construire une perturbation ω_1 de ω qui ne modifie pas le type analytique de chaque singularité, ni des holonomies du diviseur mais telle qu'il n'existe pas de germe d'application holomorphe de $(\mathcal{M}_\omega, D_5)$ sur $(\mathcal{M}_\omega, D_4)$ conjuguant les feuilletages.

1.2 Notion de marquage d'un feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine

1.2.1 Système complet simple de lacets

Soit $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$ un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_ϖ . Soit D' une composante irréductible de D_ϖ et $D = \Lambda_\omega(D')$ la composante irréductible de D_ω associé. Notons $I_{D'}$ l'ensemble $D' \cap \Sigma_\varpi$ et fixons un point, p , de $D - \Sigma_\omega$. Une famille $((\gamma_i)_{i \in I_{D'}}; p)$ de lacets, d'origine p , plongés dans $D - \Sigma_\omega$ sera appelée, ici, *un système complet simple de lacets de $D - \Sigma_\omega$* si :

1. Chaque γ_i est un plongement topologique du cercle unité S^1 dans $D - \bigcup_{j \in I_{D'}, i \neq j} (\text{Im}(\gamma_j) - p)$.
2. Il existe un homéomorphisme préservant l'orientation φ d'un voisinage U de p dans D sur le disque standard $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ de \mathbb{C} qui transforme $\bigcup_{i \in I_{D'}} |\gamma_i| \cap U$ en l'image réciproque de l'axe réel par l'application $z^{2 \cdot (\#I_{D'})}$ restreinte à \mathbb{D} .
3. Pour chaque $i, j \in I_{D'}$, $i \neq j$, l'indice du lacet γ_i autour du point $\sigma_\omega(i)$ est 1 et l'indice du lacet γ_j autour du point $\sigma_\omega(j)$ est nul.

Lorsque la condition 1 est réalisée, une notion canonique d'indice sur D est obtenue de la manière suivante :

Notons C_i , $i \in I_{D'}$, la composante connexe de $D - \gamma_i$ qui ne contient pas le point $\sigma(i)$. Désignons par C le connexe obtenu par intersection de tous les C_i , $C = \bigcap_{i \in I_{D'}} C_i$. Fixons x_0 un point de l'intérieur de C et un biholomorphisme τ_{x_0} qui identifie $D - \{x_0\}$ et \mathbb{C} . Nous définissons l'indice de γ_i autour du point $\sigma(j)$ comme étant l'indice, dans \mathbb{C} , du lacet $\tau_{x_0}(\gamma_i)$ autour du point $\tau_{x_0}(\sigma(j))$: $ind(\tau_{x_0}(\gamma_i), \tau_{x_0}(\sigma(j))) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau_{x_0}(\gamma_i)} \frac{1}{z - \tau_{x_0}(\sigma(j))} dz$. Nous voyons facilement que cette valeur ne dépend pas du choix du point x_0 de C , ni du biholomorphisme τ_{x_0} utilisé.

La collection $((\gamma_i)_{i \in I_{D'}}; p)_{D' \in \text{Comp}(D_\varpi)}$ sera appelée *système complet simple de lacets du feuilletage $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$* prémarqué par \mathcal{F}_ϖ si, pour chaque $D' \in \text{Comp}(D_\varpi)$, la famille $((\gamma_i)_{i \in I_{D'}}; p)$ est un système complet simple de lacets de $\Lambda_\omega(D') - \Sigma_\omega$.

Deux systèmes complets simples de lacets

$$((\gamma_i)_{i \in I_{D'}}; p_{D'})_{D' \in \text{Comp}(D_\varpi)} \text{ et } ((\gamma'_i)_{i \in I_{D'}}; p'_{D'})_{D' \in \text{Comp}(D_\varpi)}$$

d'un même feuilletage $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$ prémarqué par \mathcal{F}_ϖ sont dits *équivalents* si pour toute composante irréductible D' de D_ϖ , il existe une famille continue, ψ_t , d'homéomorphismes de D sur D qui vérifie :

1. Pour tout $s \in \Sigma_\omega$, $\psi_t(s) = s$.
2. $\psi_0 = id$.

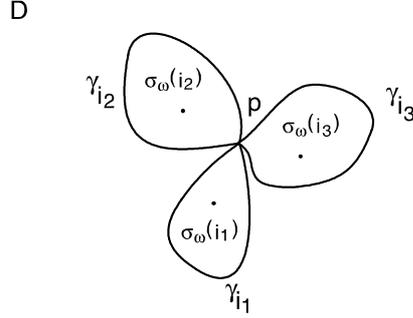


FIG. 2 – Exemple de système complet simple sur la composante D .

3. $\psi_1(\gamma_i) = \gamma'_i, i \in I_{D'}$,

en particulier $\psi_1(p_{D'}) = p'_{D'}$.

Signalons que si deux tels systèmes sont équivalents

$$\left((\gamma_i)_{i \in I_{D'}}; p_{D'} \right)_{D' \in \text{Comp}(D_\varpi)} \simeq \left((\gamma'_i)_{i \in I_{D'}}; p'_{D'} \right)_{D' \in \text{Comp}(D_\varpi)}$$

alors les indices des lacets γ_i et γ'_i autour du point $\sigma_\omega(j)$, $i, j \in I_{D'}$, sont égaux.

1.2.2 Feuilletages marqués

Définition 1.2.1 *Un feuilletage marqué par \mathcal{F}_ϖ sera la donnée d'un quadruplet $\mathcal{F}_\omega^M = (\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega, [\Gamma_{\omega, D}]_{D \in \text{comp}(D_\omega)})$ tel que $(\mathcal{F}_\omega, \Lambda_\omega, \sigma_\omega)$ est un feuilletage prémarqué par \mathcal{F}_ϖ , et tel que, pour tout $D \in \text{Comp}(D_\omega)$, $[\Gamma_{\omega, D}]$ est la classe d'un système complet simple de lacets de $D - \Sigma_\omega$ où $(\Gamma_{\omega, D}) = ((\gamma_i)_{i \in I_D}; p_D)$.*

Considérons deux germes de feuilletage, \mathcal{F}_ω^M et $\mathcal{F}_{\omega'}^M$, marqués par \mathcal{F}_ϖ . Nous dirons qu'une application $H : (\mathcal{M}_\omega, D_\omega) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega'}, D_{\omega'})$, qui conjugue les germes de feuilletage, $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}$, resp. une application $H : D_\omega \rightarrow D_{\omega'}$, est compatible avec (ou respecte) le marquage si elle est compatible au prémarquage et vérifie pour tout $D \in \text{Comp}(D_\varpi)$, l'égalité $[H \circ \Gamma_{\omega, \Lambda_\omega}(D)] = [\Gamma_{\omega', \Lambda_{\omega'}}(D)]$.

Définition 1.2.2 *Une déformation équiréductible d'un feuilletage \mathcal{F}_ω de paramètre P , marquée par \mathcal{F}_ϖ , sera la donnée d'un quadruplet*

$$\mathcal{F}_\eta^M = \left(\mathcal{F}_\eta, \Lambda_\eta, \sigma_\eta, [\Gamma_{\eta, \Lambda_\eta}(D)]_{D \in \text{Comp}(D_\varpi)} \right)$$

où :

1. le triplet $(\mathcal{F}_\eta, \Lambda_\eta, \sigma_\eta)$ est une déformation équiréductible de paramètre P prémarquée par \mathcal{F}_ϖ ,
2. la fibre au-dessus de t , $t \in P$, de $[\Gamma_{\eta, \Lambda_\eta}(D)]$, notée $[\Gamma_{\eta_t, \Lambda_{\eta_t}}(D)]$, est une classe d'un système complet simple de lacets tracés sur la composante $\Lambda_{\eta_t}(D)$ du diviseur D_{η_t} de \mathcal{F}_{η_t} qui vérifie :
 - Il existe une C^∞ -trivialisatoin $H : D_\omega \times P \rightarrow D_\eta$ de la déformation du diviseur, un système complet simple de lacets $[\Gamma_{\eta_0, \Lambda_{\eta_0}}(D)]_{D \in \text{Comp}(D_\varpi)}$

sur $(\mathcal{F}_{\eta_0}, \Lambda_{\eta_0}, \sigma_{\eta_0})$ tel que pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $[\Gamma_{\eta_t, \Lambda_{\eta_t}(D)}] = [H_t \circ \Gamma_{\eta_0, \Lambda_{\eta_0}(D)}]$.

Cette définition n'a de sens que si $[\Gamma_{\eta, D}]$ ne dépend pas de la trivialisaton choisie :

Proposition 1.2.3 Soit $((\mathcal{F}_{\omega}, \Lambda_{\omega}, \sigma_{\omega}), [\Gamma_D = (\gamma_i, p)_{i \in I_D}]_{D \in \text{Comp}(D_{\omega})})$ un feuilletage marqué par \mathcal{F}_{ϖ} . Soit $(\mathcal{F}_{\eta}, \Lambda_{\eta}, \sigma_{\eta})$ une déformation équiréductible de $(\mathcal{F}_{\omega}, \Lambda_{\omega}, \sigma_{\omega})$ prémarquée par \mathcal{F}_{ϖ} de paramètre P . Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G} : \mathcal{M}_{\omega} \times P \rightarrow \mathcal{M}_{\eta}$ deux trivialisations \mathcal{C}^{∞} de l'espace de déformation. Soient $H, G : D_{\omega} \times P \rightarrow D_{\eta}$ leur restriction respective à $D_{\omega} \times P$. Alors pour chaque $t \in P$, les deux systèmes complets simples de lacets $(H_t \circ \Gamma_D)_{D \in \text{Comp}(D_{\omega})}$ et $(G_t \circ \Gamma_D)_{D \in \text{Comp}(D_{\omega})}$ sont équivalents.

Preuve. Il suffit de montrer que, pour tout $t \in P$ et pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\omega})$, les systèmes de lacets complets simples (Γ_D) et $(H_t^{-1} \circ G_t \circ \Gamma_D)$ du feuilletage prémarqué $(\mathcal{F}_{\omega}, \Lambda_{\omega}, \sigma_{\omega})$ sont équivalents. Or, à t fixé, pour chaque composante $D \in \text{Comp}(D_{\omega})$, la famille continue $(H_s^{-1} \circ G_s)_{s \in [0, t]}$ d'homéomorphismes de D dans D vérifie trivialement les propriétés 1) 2) et 3) de la définition 1.2.1 ■

Par restriction, une déformation $\mathcal{F}_{\eta}^{\mathcal{M}}$ marquée par \mathcal{F}_{ϖ} induit sur chaque fibre $\Pi_{\eta}^{-1}(t)$ un marquage par \mathcal{F}_{ϖ} canonique.

Réciproquement, considérons un feuilletage $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathcal{M}}$ marqué par \mathcal{F}_{ϖ} . Alors toute déformation équiréductible \mathcal{F}_{η} , de paramètre P , de \mathcal{F}_{ω} est munie d'un marquage par \mathcal{F}_{ϖ} canonique induit par le marquage de \mathcal{F}_{ω} ; le prémarquage provient de la proposition 1.1.4 et le système de lacets est défini pour tout $t \in [0, 1]$ par $[\Gamma_{\eta, D}]_{|\Pi_{\eta}^{-1}(t)} = [H_t \circ \Gamma_{\omega, D}]$ où H est une \mathcal{C}^{∞} -trivialisaton de la déformation du diviseur D_{η} .

Définition 1.2.4 Un germe de déformation SL-équisingulier d'un feuilletage marqué par $\mathcal{F}_{\varpi}, \mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$, de paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, le long de $0 \times P$, sera par définition la donnée d'un germe de déformation SL-équisingulier marqué, $\mathcal{F}_{\eta}^{\mathcal{M}}$, du feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} de paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, le long de $0 \times P$, munie du marquage par \mathcal{F}_{ϖ} canoniquement induit par le marquage de \mathcal{F}_{ω} .

Remarque 1.2.5 Tout déploiement pouvant être considéré comme une déformation, les définitions de prémarquage et de marquage d'une déformation se transportent immédiatement aux définitions de prémarquage et de marquage d'un déploiement.

1.3 SL-équivalence, SL-reliabilité, SL-coborbisme entre - deux feuilletages

Considérons un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathcal{M}}$, marqué par \mathcal{F}_{ϖ} .

Pour chaque composante irréductible D de D_{ω} fixons une transversale au feuilletage au point de base des lacets du marquage, $p_D \in D$ et une coordonnée sur celle-ci. Le système complet simple de lacets $[\Gamma_{\omega, D}] = [(\gamma_i)_{i \in I_D}; p_D]$ induit, au moyen du morphisme de représentation d'holonomie, un système de

générateurs, $(h_{\omega, \gamma_i})_{i \in I_D}$, du groupe d'holonomie de \mathcal{F}_ω , noté $H_{[\Gamma_\omega, D]}$. A automorphisme intérieur près, le sous-groupe, $H_{[\Gamma_\omega, D]}$, de $\text{Aut}(\mathbb{C}, 0)$ ne dépend que du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ et de la composante D . La mise en indice du système $[\Gamma_\omega, D]$ signale simplement quels sont les générateurs du groupe $H_{[\Gamma_\omega, D]}$ que nous considérons, ce qui est pour nous une information essentielle.

Définition 1.3.1 (SL-équivalence) *Deux germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_ϖ , seront SL-équivalents si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *Il existe un homéomorphisme préservant l'orientation $H : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible¹⁶ aux marquages.*
2. *pour toute singularité $m \in \Sigma_\varpi$, il existe un germe de biholomorphisme $\psi : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(m)) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(m))$ qui conjugue les germes de feuilletages en ces points, i.e. $\psi^*(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(m)) = (\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(m))$, et tel que, pour chaque $D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, $D \ni \sigma_{\omega_0}(m)$, on a égalité des germes : $(\psi(D), \sigma_{\omega_1}(m)) = (\Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_0}^{-1}(D), \sigma_{\omega_1}(m))$.*
3. *Pour chaque composante $D \in \text{Comp}(D_\varpi)$, il existe un germe de biholomorphisme Ψ_D de $(\mathbb{C}, 0)$ qui conjugue les générateurs (h_{ω_0, γ_i}) et (h_{ω_1, μ_i}) des groupes d'holonomies $H_{[\Gamma_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(D)]}$ et $H_{[\Gamma_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(D)]}$:*

Notons par $[\Gamma_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(D)] = [(\gamma_i)_{i \in I_D}; p]$, resp. $[\Gamma_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(D)] = [(\mu_i)_{i \in I_D}; q]$, le système complet simple de lacets donné par le marquage de \mathcal{F}_{ω_0} , resp. \mathcal{F}_{ω_1} , et notons par h_{ω_0, γ_i} , resp. h_{ω_1, μ_i} , le difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ image, par le représentation d'holonomie, du lacet γ_i , resp. du lacet μ_i . Alors pour tout $i \in I_D$, on a égalité $\Psi_D \circ h_{\omega_0, \gamma_i} \circ \Psi_D^{-1} = h_{\omega_1, \mu_i}$.

La notion que nous décrivons maintenant se décline en deux gammes, faible et normale :

Définition 1.3.2 (SL-reliabilité) *Deux germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_ϖ , seront SL-reliés si il existe un germe de déformation SL-équisingulière¹⁷ \mathcal{F}_η^M , du feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$, de paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, le long de $0 \times P$, marquée par \mathcal{F}_ϖ , dont la fibre en 1 est $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$.*

Définition 1.3.3 (Faible SL-reliabilité) *Deux germes de feuilletages holomorphes singuliers $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, marqués par \mathcal{F}_ϖ , seront faiblement SL-reliés s'il existe une collection de germes de feuilletage $(\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^M)_{i=0, \dots, n}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_ϖ , tels que $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_0}^M = \mathcal{F}_{\omega_0}^M$, $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_n}^M = \mathcal{F}_{\omega_1}^M$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^M$ et $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_{i+1}}^M$ sont SL-reliés.*

La même idée se décline avec des déploiements :

Définition 1.3.4 (SL-cobordisme) *Deux germes de feuilletages holomorphes singuliers $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, marqués par \mathcal{F}_ϖ seront SL-cobordants s'il existe un déploiement SL-équisingulier \mathcal{F}_η^M , de paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, le long de $0 \times P$, marqué par \mathcal{F}_ϖ , dont la fibre en 0 est $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et la fibre en 1 est $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$.*

¹⁶ Cf. § 1.2.2.

¹⁷ Cf. Définition 1.2.4.

On pourrait, comme pour la SL-reliabilité, définir le cobordisme faible comme la relation d'équivalence engendrée par la relation de cobordisme ci-dessus.

On remarque que si dans la définition 1.3.3 l'égalité $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_n}^{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ est remplacée par la phrase "Il existe un germe de biholomorphisme, compatible¹⁸ au marquage, $\tilde{\varphi} : (\mathcal{M}_{\tilde{\omega}_n}, D_{\tilde{\omega}_n}) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1})$, qui conjugue les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\omega}_n}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$ " alors les feuilletages $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_n}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ sont, encore, faiblement SL-reliés. En effet, $\tilde{\varphi}$ induit un germe de biholomorphisme φ_{\bullet} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui conjugue $\tilde{\omega}_n$ et ω_1 . Le biholomorphisme φ_{\bullet} peut-être relié à l'identité. Ainsi, ces deux feuilletages font partie d'une famille holomorphiquement triviale et donc d'un même déploiement SL-équisingulier.

1.4 Homéomorphismes de \mathbb{P}^1 et feuilletages marqués

Soient $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ et $\mathcal{Q} = \{q_1, \dots, q_n\}$ deux sous-ensembles de n points distincts de \mathbb{P}^1 . Munissons l'espace $\text{Homéo}^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ des homéomorphismes f de \mathbb{P}^1 préservant l'orientation tels que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$, de la topologie de la convergence uniforme. Considérons sur cet espace la relation d'équivalence "d'isotopie relative" : $f \underset{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}{\approx} g$ si et seulement si il existe une courbe continue $[0, 1] \rightarrow \text{Homéo}^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$, $t \rightarrow F_t$, joignant f à g : $F_0 = f$, $F_1 = g$.

Proposition 1.4.1 *Toute classe d'équivalence de $\underset{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}{\approx}$ possède un représentant $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui satisfait la propriété suivante :*

- (*) f est C^∞ sur tout \mathbb{P}^1 et est holomorphe sur un voisinage de \mathcal{P}
(i.e. $\bar{\partial}f$ est à support dans $\mathbb{P}^1 - \mathcal{P}$).

Lemme 1.4.2 *Soient a_1, \dots, a_n des applications holomorphes du disque unité $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C}, |s| < 1\}$ à valeur dans \mathbb{P}^1 telle que $a_j(s) \neq a_k(s)$ pour $k \neq j$ et tout $s \in \mathbb{D}$. Alors il existe un difféomorphisme fibré C^∞*

$$H : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}, \quad H(z, s) = (H_s(z), s)$$

qui vérifie :

- pour tout $s \in \mathbb{D}$, $H_s(A(s)) = A(0)$ où $A(s)$ est le sous-ensemble $\{a_1(s), \dots, a_n(s)\} \subset \mathbb{P}^1$,
- H est holomorphe en restriction à un voisinage ouvert approprié de

$$Y = \bigcup_{j=1}^n Y_j, Y_j = \{(a_j(s), s) / s \in \mathbb{D}\}.$$

Preuve du Lemme . Fixons des biholomorphismes fibrés Ψ_j de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}$, $\Psi_j(z, s) = (\Psi_{j,s}(z), s)$, tels que $\Psi_j(Y_j) = \{a_j(0)\} \times \mathbb{D}$, $j = 1, \dots, n$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit les voisinages ouverts des Y_j ,

$$W_j(\varepsilon) = \Psi_j^{-1}(D_j^0(\varepsilon) \times \mathbb{D}),$$

ne s'intersectent pas, où $D_j^0(\varepsilon)$ est le disque $|z - a_j(s)| < \varepsilon$, dans une carte z de \mathbb{P}^1 où $\{z = \infty\} \neq a_j(0)$, $j = 1, \dots, n$. Le champ de vecteurs holomorphes $\delta = \frac{\partial}{\partial s}$ sur \mathbb{D} se relève, via la projection $\pi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, en un unique champ holomorphe $\tilde{\delta}$

¹⁸ Cf. § 1.2.2.

sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}$, tangent au feuilletage horizontal de feuilles $z \times \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{P}^1$. Notons δ_j la restriction à $W_j(\varepsilon)$ du champ $\Psi_j^*(\tilde{\delta})$. Considérons les champs analytiques réels δ' , resp. δ'' , sur \mathbb{D} dont les flots correspondent à la restriction du flot (holomorphe) de δ au temps réel (resp. imaginaire pur), que nous appelons "partie réelle" et "partie imaginaire" de δ . Les parties réelles δ'_j , resp. imaginaires δ''_j , des champs δ_j , définies de manière analogue sont des relevés de δ' et δ'' , sur $W_j(\varepsilon)$, qui sont tangents à Y_j . Considérons maintenant un recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}$ qui contient les ouverts $W_1(\varepsilon), \dots, W_n(\varepsilon)$ et tels que si U_α n'est pas l'un de ces ouverts alors $U_\alpha \cap W_j(\frac{\varepsilon}{3}) = \emptyset$. Les U_α peuvent être choisis de sorte qu'il existe des champs C^∞ X'_α et X''_α sur U_α qui sont des relevés de δ' , resp. δ'' . Soit ρ_α une partition de l'unité subordonnée au recouvrement \mathcal{U} tel que si $U_\alpha = W_j(\alpha)$ alors $\rho_\alpha|_{W_j(\frac{\varepsilon}{3})} \equiv 1$. Les champs $X' = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \rho_\alpha X'_\alpha$, resp. $X'' = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \rho_\alpha X''_\alpha$ sont des relevés de δ' resp. δ'' et ils coïncident avec δ'_j resp. δ''_j en restriction à $W_j(\frac{\varepsilon}{3})$.

Notons $\Phi'(z, s, t)$ resp. $\Phi''(z, s, t)$ les flots de ces champs. On a :

- $\Phi'(z, s, t) = (\tilde{\Phi}'(z, s; t); s + t)$, $\Phi''(z, s, t) = (\tilde{\Phi}''(z, s; t); s + it)$,
- si $(z, s) \in W_j(\frac{\varepsilon}{3})$ alors $\tilde{\Phi}'(z, s; t)$ et $\tilde{\Phi}''(z, s; t) \in W_j(\frac{\varepsilon}{3})$,
- les applications $(z, s) \rightarrow \tilde{\Phi}'(z, s; t)$ et $(z, s) \rightarrow \tilde{\Phi}''(z, s; t)$ sont holomorphes lorsque (z, s) varie dans chaque $W_j(\frac{\varepsilon}{3})$, $j = 1, \dots, n$ et t est fixé.
- $\tilde{\Phi}'(a_j(s), s; t) = a_j(s + t)$, $\tilde{\Phi}''(a_j(s), s; t) = a_j(s + it)$ où $i = \sqrt{-1}$.

Ainsi on obtient l'application H cherchée en posant

$$H(z, s_1 + is_2) = \tilde{\Phi}''(\tilde{\Phi}'(z, 0, s_1), s_2).$$

■

Preuve de la Proposition 1.4.1 . 1^{ere} étape : Réduction au cas $P = Q$.

Supposons la proposition démontrée pour la relation d'isotopie $\approx_{\mathcal{P}, \mathcal{P}}$, noté $\approx_{\mathcal{P}}$, sur l'espace $Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}) := Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}, \mathcal{P})$ et considérons

$$f \in Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

Une conséquence du lemme précédent est qu'il existe un élément

$$h \in Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

qui vérifie la propriété (*). En effet l'espace

$$(1) Z = \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 / c_j \neq c_k \text{ pour } k \neq j\}$$

est connexe (son complémentaire est une hyper-surface complexe) et les points $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $\mathcal{Q} = \{q_1, \dots, q_n\} \in Z$ peuvent être joints par une "chaîne" de disques holomorphes plongés dans $Z : A^k = (a_1^k, \dots, a_n^k) : \mathbb{D}(1) \rightarrow \mathbb{Z}$ holomorphes $k = 0, \dots, l$ tels que $A^0(0) = \mathcal{P}$, $A^l(\frac{1}{2}) = \mathcal{Q}$ et $A^r(\frac{1}{2}) = A^r(\frac{1}{2})$ pour $r = 1, \dots, n$.

Par hypothèse il existe une isotopie $t \rightarrow g_t \in Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P})$ qui relie $g_0 = h^{-1} \circ f$ à un élément $g_1 \in Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P})$ qui vérifie la propriété (*). Ainsi $t \rightarrow h_t := h \circ g_t \in Homéo^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ est une isotopie reliant $h_0 = f$ à l'élément $h_1 = h \circ g_1$ qui satisfont la propriété (*).

2^{eme} étape : Preuve de la proposition dans le cas $P = Q$.

Fixons $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ et notons encore $P = \{p_1, \dots, p_n\} \in Z$. Il est bien connu [Bi] que l'application

$$\begin{aligned} & \text{Homéo}^+(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\varepsilon_p} Z \\ & f \mapsto (f(p_1), \dots, f(p_n)) \end{aligned}$$

est une fibration de fibre $\varepsilon_p^{-1}(P) = \text{Homéo}^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P})$. La suite exacte d'homotopie donne ainsi un morphisme δ du groupe de tresse à $n-1$ brins $B_{n-1} = \Pi_1(Z; P)$ sur le groupe d'homotopie $\Pi_0(\text{Homéo}^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P})) = \Pi_0(\text{Homéo}(\mathbb{P}^1; \mathcal{P}) / \underset{\mathcal{P}, \mathcal{P}}{\approx})$. Il associe à tout $\varrho \in \Pi_1(Z, P)$ la classe d'isotopie $\langle f_A \rangle$ de l'homéomorphisme obtenu en choisissant un élément $A \in \varrho$, $A = (a_1, \dots, a_n) : [0, 1] \xrightarrow{c^0} Z$, $A(0) = A(1) = (p_1, \dots, p_n)$, puis en construisant un homéomorphisme fibré H_A de $\mathbb{P}^1 \times Z$, $H_A(z, s) = (H_{A(s)}(z), s)$ qui vérifie $H_A(p_j, s) = a_j(s)$ et en posant $f_A = H_1$. En choisissant un représentant A de ϱ qui soit affine par morceaux et en appliquant le lemme précédent à chaque morceau on voit que la classe d'isotopie relative $\delta(\varrho)$ contient un homéomorphisme qui vérifie la propriété (*). Ceci est vrai pour tout $\varrho \in \Pi_1(Z; P)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que δ est surjective. Or Z est connexe et la suite

$$\Pi_1(Z; P) \rightarrow \Pi_0(\text{Homéo}^+(\mathbb{P}^1; \mathcal{P})) \rightarrow \Pi_0(Z)$$

est exacte. ■

Corollaire 1.4.3 *Si deux germes de feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ marqués par \mathcal{F}_ω sont SL équivalents, alors il existe un homéomorphisme $H : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ entre les diviseurs des réductions de ω_0 et ω_1 , qui est compatible au marquage et qui est de plus holomorphe lorsqu'on le restreint à un voisinage approprié du lieu singulier Σ_{ω_0} .*

En effet, la SL-équivalence entre les feuilletages induit l'existence d'un homéomorphisme $\tilde{H} : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ entre les diviseurs des réductions de ω_0 et ω_1 , qui est compatible au marquage. L'existence de l'homéomorphisme H découle directement de la proposition précédente.

1.5 Feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2° espèce.

Définition 1.5.1 *Un germe de feuilletage \mathcal{F}_ω singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est de 2° espèce s'il est non-dicritique et vérifie :*

- (a) *ou bien son feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ ne possède pas de singularité de type noeud-col,*
- (b) *ou bien les singularités de type noeud-col du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ sont en des points réguliers du diviseur D_ω et leur séparatrice forte coïncide avec une composante irréductible de celui-ci.*

Définition 1.5.2 *Un germe de feuilletage \mathcal{F}_ω singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2° espèce sera appelé de 2° espèce générale si :*

1. *En chaque point singulier du diviseur D_ω le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ est :*
 - (a) *ou bien de type noeud,*

- (b) ou bien de type selle (résonnante ou non) linéarisable,
- (c) ou bien de type selle résonnante non linéarisable et le chapelet de sphères associé à cette singularité ne possède pas d'autre automorphisme que l'identité (Cf. §5).

2. En chaque point régulier du diviseur D_ω et singulier du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ où la singularité est de type noeud-col snc (i.e. la variété faible diverge), l'holonomie de la variété forte possède un chapelet de sphères dont le seul automorphisme est l'identité.

Remarquons que dans cette définition nous n'imposons aucune condition aux singularités du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$, situées sur la partie régulière du diviseur D_ω , qui sont de type selle, de type noeud, ou de type noeud-col à variété faible convergente.

Remarque 1.5.3 Tout germe de feuilletage \mathcal{F}_ω singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2° espèce tel que toutes les singularités de D_ω de type selle-résonnante sont linéarisables et tel que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ ne possède pas de singularité de type noeud-col snc¹⁹, est de fait de 2° espèce générale.

Ce cas se produit lorsque l'arbre dual \mathbb{A}_ω possède un unique sommet de valence $(n + 1) \geq 3$ et n sommets de valence 1. L'arbre dual est alors composé d'un sommet central duquel partent n branches mortes. Chaque branche morte possède à l'une de ses extrémités un sommet de valence 1. La composante du diviseur associée à ce sommet possède une unique singularité qui est ainsi linéarisable.

De plus, entre le sommet de valence n et celui de valence 1, la branche morte est composée de sommets de valence 2. Une composante correspondante à l'un de ces sommets détient deux points singuliers du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ qui sont, de fait, en des points singuliers du diviseur. Ces points singuliers ne peuvent donc pas être de type noeud-col, car le feuilletage est de 2° espèce. En utilisant les indices de Camacho-Sad, on sait qu'alors chaque singularité appartenant à une branche morte est de type selle résonnant.

Une composante du diviseur associée à un sommet de valence 2 dont on sait qu'une de ses singularités est linéarisable, vérifie que ses deux singularités sont linéarisables. En effet le groupe d'holonomie de la composante est linéarisable ; il est engendré par le difféomorphisme d'holonomie de la singularité linéarisable. L'holonomie de la seconde singularité est, ainsi, linéarisable. Le théorème de Mattei Moussu [Mat-Mou] conclut à la linéarisabilité de la seconde singularité.

On assiste ainsi à la propagation de la linéarisabilité le long des branches mortes. Il est alors évident de conclure que toutes les singularités de D_ω sont de type selle-résonnante linéarisable et que le feuilletage réduit ne possède pas de singularité de type noeud-col snc²⁰...

1.6 Enoncés des Théorèmes Principaux

Théorème A Soient deux germes de feuilletages holomorphes, $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$, de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, non dicritiques, marqués par \mathcal{F}_ϖ , SL-équivalents. Alors il existe un feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_2}^M$, marqué par \mathcal{F}_ϖ , SL-équivalent à $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ tel que :

¹⁹ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

²⁰ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

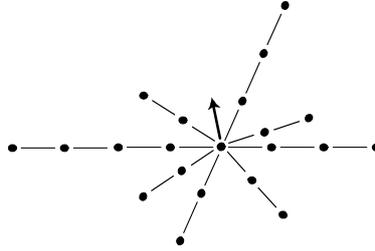


FIG. 3 – Exemple d'arbre dual (non pondéré) réalisant les conditions de la remarque 1.5.3.

- Les feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}^{\mathcal{M}}$ sont SL -cobordants.
- Il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_2} \rightarrow D_{\omega_1}$, entre les diviseurs des réductions de \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} , compatible²¹ aux marquages.

Théorème B Soient deux germes de feuilletages holomorphes, $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$, de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2° espèce générale, marqués par $\mathcal{F}_{\overline{\omega}}$. S'ils sont SL -équivalents alors ils sont faiblement SL -reliés.

²¹Cf. § 1.2.2.

2 Démonstration du Théorème A.

La stratégie de cette démonstration a déjà été donnée dans l'introduction; nous y renvoyons le lecteur.

Nous notons, dans ce chapitre, $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$ l'espace des paramètres. Tous les feuilletages considérés dans cette section sont non dicritiques (Cf. §0.2.1 Singularités réduites).

2.1 Un pont au milieu de nulle part...

Etant donnés deux germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$, $(\mathcal{F}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}, [\Gamma_{\omega_0, D}]_{D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})})$ et $(\mathcal{F}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}, [\Gamma_{\omega_1, D}]_{D \in \text{Comp}(D_{\omega_1})})$ marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalents, nous "construisons un pont" entre ces deux germes : une variété (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) de dimension complexe 3, germifiée le long d'un diviseur, fibrée au-dessus de P , $\pi_P^a : (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) \rightarrow P$, munie d'un sous-espace $\Sigma_P^a \subset D_P^a$ et qui relie les triplets $(\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}, \Sigma_{\omega_1})$ et $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}, \Sigma_{\omega_0})$. Nous montrons que cette variété est \mathcal{C}^∞ -conjuguée au-dessus de P à la variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}) \times P$ et que cette conjugaison trivialise aussi Σ_P^a . Plus précisément :

Définition 2.1.1 *Considérons deux germes de feuilletages holomorphes, $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$, de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} . Un pont \mathcal{C}^∞ , de paramètre $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, entre ces deux germes de feuilletages, sera un triplet*

$$(((\mathcal{M}_P^a, D_P^a), \pi_P^a, \nu_0, \nu_1), \Sigma_P^a, \varphi_P)$$

tel que :

1. le diagramme suivant est formé de deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}) & \xrightarrow{\nu_0} & (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) & \xleftarrow{\nu_1} & (\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi_P^a & \square & \downarrow \\ \{0\} & \hookrightarrow & (\mathbb{C}, [0, 1]) & \longleftarrow & \{1\} \end{array}$$

Où :

- (a) \mathcal{M}_P^a est une variété holomorphe de dimension 3,
 - (b) D_P^a est une hypersurface de \mathcal{M}_P^a dont chaque composante irréductible est lisse,
 - (c) (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) est homéomorphe à $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}) \times P$, par un homéomorphisme fibré au-dessus de P dont la fibre en 0 est ν_0 ,
 - (d) ν_i est un germe, le long de D_{ω_i} , de plongement holomorphe tel que $\nu_i(D_{\omega_i}) \subset D_P^a$, $i = 1, 2$,
 - (e) π_P^a est un germe, le long de D_P^a , de submersion holomorphe tel que la restriction de π_P^a à chaque composante irréductible de D_P^a est une submersion lisse, et,
 - (f) pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, $\Lambda_{\omega_0}(D)$ et $\Lambda_{\omega_1}(D)$ appartiennent à la même composante irréductible de D_P^a .
2. Σ_P^a est un sous-espace lisse de D_P^a tel que :
 - (a) la restriction de π_P^a à chaque composante irréductible de Σ_P^a est un biholomorphisme,

- (b) $\nu_i^{-1}(\Sigma_P^a) = \Sigma_{\omega_i}$, $i = 0, 1$,
(c) pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$, $\sigma_{\omega_0}(i)$ et $\sigma_{\omega_1}(i)$ appartiennent à la même composante irréductible de Σ_P^a .

3. φ_P est un C^∞ -difféomorphisme préservant l'orientation qui vérifie le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} D_{\omega_0} \times P & \xrightarrow{\varphi_P} & D_P^a \\ pr_2 \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_P^a \\ & P & \end{array}$$

ainsi que les assertions suivantes :

- (a) en restriction à un voisinage de $\Sigma_{\omega_0} \times P$, φ_P est biholomorphe sur un voisinage de Σ_P^a .
(b) φ_P vérifie l'égalité $\varphi_P|_{D_{\omega_0} \times 0} = \nu_0|_{D_{\omega_0}}$.
(c) φ_P vérifie, pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, l'égalité $\left[\varphi_1 \circ \Gamma_{\omega_0, \Lambda_{\omega_0}(D)} \right] = \left[\nu_1 \circ \Gamma_{\omega_1, \Lambda_{\omega_1}(D)} \right]$ avec $\varphi_1 = \varphi_P|_{pr_2^{-1}(1)}$.

Lorsque le contexte est clair, le pont $((\mathcal{M}_P^a, D_P^a), \pi_P^a, \nu_0, \nu_1), \Sigma_P^a, \varphi_P)$ sera noté (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) .

Cette définition induit l'existence d'un "marquage" $(\Lambda_P^a, \sigma_P^a, [\Gamma_{P,D}])$ par \mathcal{F}_{ϖ} sur la variété (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) défini, de manière fibrée, par :

$$\begin{aligned} \Lambda_s^a : \text{Comp}(D_{\varpi}) &\rightarrow \text{Comp}(D_s^a), \quad D \mapsto \varphi_s \circ \Lambda_{\omega_0}(D), \\ \sigma_s^a : \Sigma_{\varpi} &\rightarrow \Sigma_s^a, \quad i \mapsto \varphi_s \circ \sigma_{\omega_0}(i), \end{aligned}$$

et par

$$[\Gamma_{s,D}] = [\varphi_s \circ \Gamma_{\omega_0,D}] \text{ pour tout } D \in \text{Comp}(D_{\omega_0}).$$

On remarque que ce marquage coïncide en $(\pi_P^a)^{-1}(1)$ avec le marquage de $(\mathcal{F}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}, [\Gamma_{\omega_1,D}]_{D \in \text{Comp}(D_{\omega_1})})$ et en $(\pi_P^a)^{-1}(0)$ avec le marquage de

$$(\mathcal{F}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}, [\Gamma_{\omega_0,D}]_{D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})}).$$

Cette définition induit l'égalité des indices d'auto-intersection : Pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\omega_1})$, $\langle \Lambda_{\omega_1}(D), \Lambda_{\omega_1}(D) \rangle = \langle \Lambda_s^a(D), \Lambda_s^a(D) \rangle$.

Énonçons le lemme principal de ce paragraphe :

Lemme 2.1.2 Soient deux germes de feuilletages holomorphes, $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$, de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL -équivalents. Alors il existe un pont C^∞ , de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$, entre ces deux germes de feuilletages.

Nous noterons par la suite $(\mathcal{M}_P^a, D_P^a, \pi_P^a, \Lambda_s^a, \sigma_s^a, \varphi_P)$ ce pont. Il y aura deux étapes à cette démonstration. Nous utilisons l'existence, due au corollaire 1.4.3, d'un difféomorphisme C^∞ , $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$, holomorphe au voisinage des lieux singuliers, respectant le marquage par \mathcal{F}_{ϖ} des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} pour construire "l'armature du pont". Elle est constituée d'un diviseur (l'espace D_P^a) qui permettra d'homotoper φ à l'identité le long de D_P^a . Nous finirons la démonstration en plongeant l'armature dans un espace plus grand, l'espace (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) , qui vérifie les conditions voulues.

2.1.1 Première étape : Construction de l'espace D_P^a et de l'application φ_P .

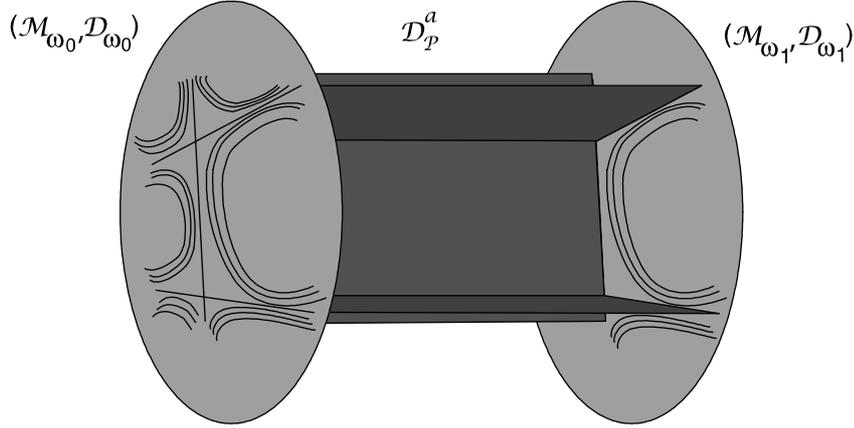


FIG. 4 – (Lemme 2.1.4) Armature d'un pont reliant deux feuilletages.

Sous les hypothèses de la proposition 2.1.2, nous avons :

Lemme 2.1.3 *Il existe un C^∞ difféomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$, holomorphe sur un voisinage de Σ_{ω_0} , compatible²² au marquage de \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} par \mathcal{F}_ϖ .*

Ce lemme n'est qu'une réécriture du corollaire 1.4.3. Ainsi, toujours sous les hypothèses du lemme 2.1.2, nous avons le :

Lemme 2.1.4 *Il existe un quintuplet $(D_P^a, \pi_P, \varphi_P, \nu_0, \nu_1)$ tel que :*

1. D_P^a est un espace analytique réduit à croisements normaux et chaque composante irréductible de D_P^a est une variété holomorphe de dimension 2,
2. π_P est une application holomorphe de D_P^a sur un voisinage de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} telle que sa restriction à chaque composante irréductible de D_P^a est une submersion holomorphe propre surjective,
3. $\varphi_P : D_{\omega_0} \times P \rightarrow D_P^a$ est une application qui vérifie la condition 3 de la définition 2.1.1,
4. $\nu_k : D_{\omega_k} \rightarrow D_P^a \cap \pi_P^{-1}(k)$, $k = 0, 1$, sont des biholomorphismes,
5. $\varphi_P|_{P \times \nu_0^{-1}(1)} = \nu_1 \circ \varphi$.

Définition 2.1.5 *Un quintuplet $(D_P^a, \pi_P, \varphi_P, \nu_0, \nu_1)$ vérifiant les quatre assertions du lemme précédent s'appellera armature de pont C^∞ .*

Preuve du lemme 2.1.4. Nous aurons besoin d'utiliser la notion de structure presque complexe sur \mathbb{P}^1 . Quitte à se placer dans une carte, nous noterons $[dz + \mu(z) d\bar{z}]$ ce type de structure. Nous utilisons le théorème d'intégration de type Ahlfors-Bers [Ahl] suivant :

²²Cf. § 1.2.2.

Théorème 2.1.6 ([Ahl]) *Considérons une famille, paramétrisée holomorphiquement par P , de structure presque complexe C^∞ sur \mathbb{P}^1 notée*

$$[dz + \mu_t(z) d\bar{z}]_{t \in P},$$

i.e. $t \rightarrow \mu_t(z)$ est holomorphe et $(z, t) \rightarrow \mu_t(z)$ est C^∞ .

Alors il existe une unique famille, paramétrisée holomorphiquement par P , de difféomorphisme C^∞ notée $f_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ telle que pour tout $t \in P$, $\mu_t(z) = \frac{\bar{\partial}_z f_t}{\partial_z f_t}(z)$ et $f_t() = *$ avec $*$ = a, b, c où a, b, c sont trois points distincts de \mathbb{P}^1 .*

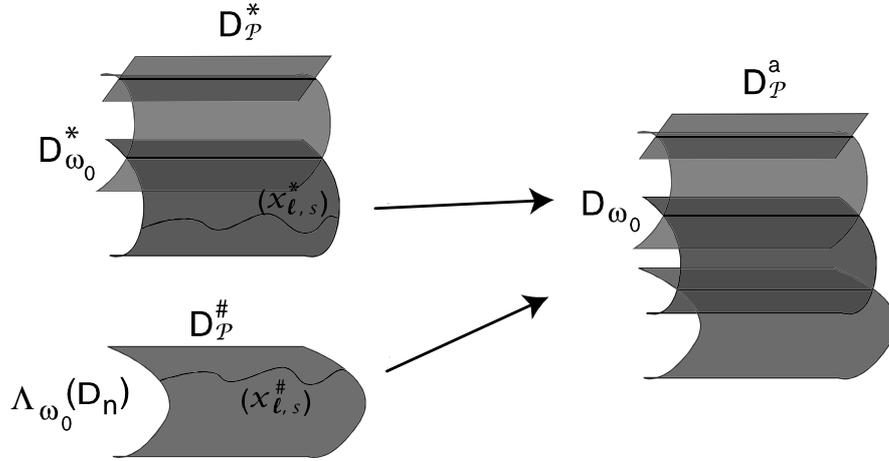


FIG. 5 – (Preuve du lemme 2.1.4) Schéma de construction de l’armature D_P^a par recollements.

Pour accroître la clarté de cette preuve, nous faisons deux cas :

Cas didactique : $\#Comp(D_\omega) = 1$.

Identifions D_{ω_0} et D_{ω_1} à \mathbb{P}^1 . Les feuilletages marqués étant SL-équivalents, nous disposons d’un homéomorphisme $H : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui vérifie $H(\Sigma_{\omega_0}) = \Sigma_{\omega_1}$ et $H(\gamma_i) = \mu_i$ où (γ_i) , resp. (μ_i) , sont des représentants des systèmes complets simples de lacets des marquages respectifs. Appliquons le corollaire 1.4.3 à H et au système de points $\{a_1, \dots, a_n\} = \Sigma_{\omega_0} \cup \{a, b, c\}$ où a, b, c sont trois points distincts n’appartenant pas à Σ_{ω_0} . On obtient l’application $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui est C^∞ , holomorphe au voisinage de Σ_{ω_0} , et de plus $(\mu'_i) = \varphi((\gamma_i))$ est un système complet simple de lacets de même classe que (μ_i) , car $\varphi \circ H^{-1}$ est isotope à l’identité dans l’espace des isotopies qui fixe chaque élément de Σ_{ω_1} .

Cette application φ induit une structure presque complexe C^∞ sur \mathbb{P}^1 définie dans les cartes par $[dz + \frac{\bar{\partial}_z \varphi}{\partial_z \varphi}(z) d\bar{z}]$. Considérons la famille, paramétrisée holomorphiquement par P , $(\mu_t(z) = t \cdot \frac{\bar{\partial}_z \varphi}{\partial_z \varphi}(z))_{t \in P}$. En appliquant le théorème précédent, nous obtenons l’existence d’une famille de C^∞ -difféomorphismes, paramétrisée holomorphiquement par P ,

$$\varphi_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

telle que pour tout $t \in P$, $\mu_t(z) = \frac{\bar{\partial}_z \varphi_t}{\partial_z \varphi_t}(z)$ et $\varphi_t(*) = *$ avec $*$ = a, b, c . L’application $\mu_t(z)$ étant nulle au voisinage des singularités Σ_{ω_0} , l’application $\varphi_t(z)$

est holomorphe au voisinage de cet ensemble. L'unicité de la famille de \mathcal{C}^∞ -diffeomorphismes φ_t implique en $t = 0$ et en $t = 1$ les égalités $\varphi_0 = id$ et $\varphi_1 = \varphi$. Nous définissons $D_P^a = \mathbb{P}^1 \times P$, $\varphi_P(z, t) = (\varphi_t(z), t)$, $\pi_P(z, t) = t$ et ν_0 et ν_1 sont donnés par les identifications de D_{ω_0} et D_{ω_1} à \mathbb{P}^1 choisies au début de la preuve.

Cas général : $\#Comp(D_\varpi) = n > 1$.

Ordonnons les composantes de D_ϖ , $Comp(D_\varpi) = \{D_1, \dots, D_n\}$. La même construction ci-dessus appliquée à chaque composante donne un quintuplet $(D_P^i, \pi_P^i, \varphi_P^i, \nu_0, \nu_1)$, $i = 1, \dots, n$. Le résultat cherché est obtenu en recollant les espaces D_P^i le long des lieux singuliers $\Sigma_P^i = \varphi_P^i((\Sigma_{\omega_0} \cap \Lambda_{\omega_0}(D_i)) \times P)$. Puis en munissant l'espace obtenu de l'unique structure holomorphe qui le rend à croisements normaux et qui coïncident avec la structure holomorphe de chaque D_P^i . ■

Nous définissons les applications de "marquage par \mathcal{F}_ϖ " relatives à l'espace D_P^a de manière fibrée en posant, pour tout $s \in P$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{P|\pi_P^{-1}(s)}^a : Comp(D_\varpi) &\rightarrow Comp(D_s^a), \quad D \mapsto \varphi_s \circ \Lambda_{\omega_0}(D), \\ \sigma_{P|\pi_P^{-1}(s)}^a : \Sigma_\varpi &\rightarrow \Sigma_s^a, \quad i \mapsto \varphi_s \circ \sigma_{\omega_0}(i), \\ [\Gamma_{P,D}] \cap \pi_P^{-1}(s) &= [\varphi_s \circ \Gamma_{\omega_0,D}] \quad \text{pour tout } D \in Comp(D_{\omega_0}). \end{aligned}$$

2.1.2 Deuxième étape : Construction de la variété \mathcal{M}_P^a .

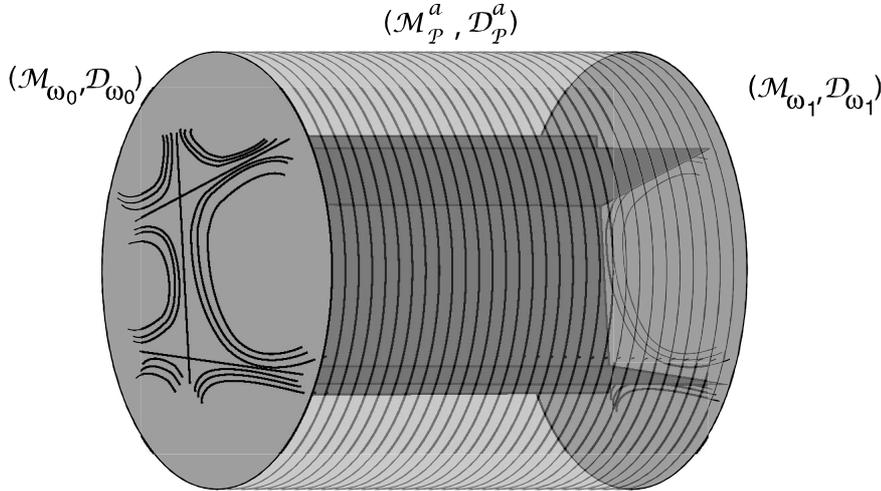


FIG. 6 – (Lemme 2.1.2) Schéma d'un pont reliant deux feuilletages.

Sous les hypothèses de la proposition 2.1.2, en utilisant les résultats du lemme 2.1.3 et 2.1.4, nous avons la :

Preuve du lemme 2.1.2. Pour cette démonstration, il suffit de vérifier la récurrence dont l'hypothèse au rang n est la suivante :

"Pour le cardinal de $Comp(D_\varpi) = n > 0$ et pour toute armature de pont \mathcal{C}^∞ , $(D_P^a, \pi_P, \varphi_P, \nu_0, \nu_1)$, il existe un sextuplet $(D_P^a, \mathcal{M}_P^a, \pi_P^a, \phi_P, \nu_0^a, \nu_1^a)$ formé :

- D'une variété holomorphe \mathcal{M}_P^a de dimension 3,
- D'un plongement $D_P^a \hookrightarrow \mathcal{M}_P^a$,
- D'une submersion $\pi_P^a : \mathcal{M}_P^a \rightarrow P$ vérifiant $\pi_{P|P^a}^a = \pi_P$,
- De deux autres plongements $\nu_l^a : (\mathcal{M}_{\omega_l}, D_{\omega_l}) \hookrightarrow (\pi_P^a)^{-1}(l)$ vérifiant $\nu_{l|D_{\omega_l}}^a = \nu_l$, avec $l = 0, 1$ et
- D'un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme $\phi_P : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P) \rightarrow (\mathcal{M}_P^a, D_P^a)$ dont la restriction à $D_{\omega_0} \times P$ coïncide à φ_P .

Ce sextuplet $(D_P^a, \mathcal{M}_P^a, \pi_P^a, \phi_P, \nu_0^a, \nu_1^a)$ sera un pont.

Démontrons cette récurrence.

- Initialisation : $\#Comp(D_\infty) = 1$.

Ici, l'espace D_P^a est la variété $\mathbb{P}^1 \times P$ qui se plonge canoniquement dans la variété $\tilde{\mathcal{C}}^2 \times P$. Ce cas est trivial, $\mathcal{M}_P^a = \tilde{\mathcal{C}}^2 \times P$.

- Propagation : $\#Comp(D_\infty) = n > 1$.

Considérons l'ensemble des composantes irréductibles $\Lambda_P^a(D)$ de D_P^a , $D \in Comp(D_\infty)$, telles que $\langle D, D \rangle = -1$ que nous noterons $\{D_1, \dots, D_r\}$.

Notons $q : D_P^a \rightarrow \hat{D}_P^a$ l'application holomorphe qui collapse le long de chaque fibre $\pi_P^{-1}(s)$ les composantes irréductibles $D_k \cap \pi_P^{-1}(s)$, $k = 1, \dots, r$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, la courbe $c_i = q(D_i) \subset \hat{D}_P^a$ est holomorphe, lisse et $\hat{\pi}_{P|c_i}$ est un biholomorphisme sur P , où $q \circ \hat{\pi}_P = \pi_P$.

Ainsi nous avons les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 D_{\omega_0} \times P & \xrightarrow{\varphi_P} & D_P^a \\
 \downarrow E_{\omega_0}^{h-1} \times id & \circlearrowleft & \downarrow q \\
 D_{\omega_0}^{(h-1)} \times P & \xrightarrow{\hat{\varphi}_P} & \hat{D}_P^a
 \end{array}
 \quad et \quad
 \begin{array}{ccccccc}
 D_{\omega_0} & \xrightarrow{\nu_0} & D_P^a & \xleftarrow{\nu_1} & D_{\omega_1} \\
 \downarrow E_{\omega_0}^{h-1} & \circlearrowleft & \downarrow q & \circlearrowleft & \downarrow E_{\omega_1}^{h-1} \\
 D_{\omega_0}^{(h-1)} & \xrightarrow{\hat{\nu}_0} & \hat{D}_P^a & \xleftarrow{\hat{\nu}_1} & D_{\omega_1}^{(h-1)} \\
 \downarrow \hat{\pi}_P & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\pi}_P & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\pi}_P \\
 0 & \hookrightarrow & P & \hookleftarrow & 1
 \end{array}$$

où :

1. L'espace $D_{\omega_k}^{(h-1)}$ est le $(h-1)$ -ième diviseur exceptionnel de l'arbre d'éclatement de ω_k , où h est la hauteur de l'arbre de réduction de \mathcal{F}_{ω_0} .
2. L'application $E_{\omega_k}^{h-1}$ est la $(h-1)$ -ième application d'éclatement²³ associée à cette désingularisation, $k = 0, 1$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence au quintuplet $(\hat{D}_P^a, \hat{\pi}_P, \hat{\varphi}_P, \hat{\nu}_0, \hat{\nu}_1)$, nous obtenons l'existence d'un sextuplet $(\hat{D}_P^a, \hat{\mathcal{M}}_P^a, \hat{\pi}_P^a, \hat{\phi}_P, \hat{\nu}_0^a, \hat{\nu}_1^a)$ qui réalise les propriétés de la récurrence.

Notons $E : \mathcal{M}_P^a \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_P^a$ l'application d'éclatement simultanée de chaque courbe c_i , $i = 1, \dots, r$. En remontant le sextuplet $(\hat{D}_P^a, \hat{\mathcal{M}}_P^a, \hat{\pi}_P^a, \hat{\phi}_P, \hat{\nu}_0^a, \hat{\nu}_1^a)$ par éclatement, nous obtenons directement le sextuplet $(D_P^a, \mathcal{M}_P^a, \pi_P^a, \phi_P, \nu_0^a, \nu_1^a)$ voulu.

Nous avons les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 D_P^a \hookrightarrow \mathcal{M}_P^a & (\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P) & \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) \\
 \downarrow E \circlearrowleft \downarrow E & \downarrow E_{\omega_0}^{h-1} \times id & \circlearrowleft \downarrow E \\
 \hat{D}_P^a \hookrightarrow \hat{\mathcal{M}}_P^a & (\mathcal{M}_{\omega_0}^{(h-1)} \times P, D_{\omega_0}^{(h-1)} \times P) & \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} (\hat{\mathcal{M}}_P^a, \hat{D}_P^a)
 \end{array}$$

²³ Cf. § 0.3.2

et

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}) & \xrightarrow{\nu_0^a} & (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) & \xleftarrow{\nu_1^a} & (\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}) \\
 \downarrow E_{\omega_0}^{h-1} & \circlearrowleft & \downarrow E & \circlearrowright & \downarrow E_{\omega_1}^{h-1} \\
 (\mathcal{M}_{\omega_0}^{(h-1)}, D_{\omega_0}^{(h-1)}) & \xrightarrow{\hat{\nu}_0^a} & (\hat{\mathcal{M}}_P^a, \hat{D}_P^a) & \xleftarrow{\hat{\nu}_1^a} & (\mathcal{M}_{\omega_1}^{(h-1)}, D_{\omega_1}^{(h-1)}) \\
 \downarrow \hat{\pi}_P^a & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\pi}_P^a & \circlearrowright & \downarrow \hat{\pi}_P^a \\
 0 & \hookrightarrow & P & \hookleftarrow & 1
 \end{array} .$$

Ce qui conclut la démonstration du lemme 2.1.2. ■

2.1.3 Quelques propriétés du pont (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) .

La proposition 2.1.2 étant démontrée, nous allons prendre quelques minutes pour éclaircir certains détails concernant le pont (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) que nous venons de construire. Nous allons montrer qu'au voisinage de chaque courbe $\Lambda_P^a(s)$, $s \in \Sigma_{\varpi}$, tracée sur le diviseur D_P^a , la variété (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) est localement analytiquement triviale. De plus le biholomorphisme de trivialisatoin coïncide sur le diviseur D_P^a avec l'application φ_P .

Notons $\mathcal{U} = (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma C(\varpi)}$, resp. $\mathcal{U}_P = (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i})_{i \in \Sigma C(\varpi)}$, un germe de recouvrement adapté²⁴ du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$, resp. du germe de variété (\mathcal{M}_P^a, D_P^a) , qui vérifient, pour tout $i \in \Sigma C(\varpi)$, l'égalité

$$\varphi_P(U_i \times P) = U_{P,i}$$

où $\Sigma C(\varpi) = \Sigma_{\varpi} \cup \text{Comp}(D_{\varpi})$.

Sous ces notations, nous avons la propriété de trivialisatoin suivante :

Lemme 2.1.7 *Il existe une application*

$$\varphi_P^a : \left(\bigsqcup_{i \in \Sigma_{\varpi}} (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \right) \times P \rightarrow \bigsqcup_{i \in \Sigma_{\varpi}} (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i})$$

telle que pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$, l'application

$$\varphi_{P|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \times P}^a : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \times P \rightarrow (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i})$$

est un biholomorphisme vérifiant $\varphi_{P|U_i \times P}^a = \varphi_{P|U_i \times P}$.

Pour la démonstration de ce lemme nous aurons besoin des sous-lemmes de trivialisatoin holomorphe suivants :

Sous-lemme 2.1.8 *Fixons i un point singulier du diviseur D_{ϖ} et notons D_1, D_2 les composantes irréductibles de D_{ϖ} qui vérifient $D_1 \cap D_2 = i$. Alors il existe un germe de biholomorphisme*

$$f_i : (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i}) \rightarrow (\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \times P$$

tel que

$$f_i(\Lambda_P^a(D_1)) = \mathcal{D} \times 0 \times P \text{ et } f_i(\Lambda_P^a(D_2)) = 0 \times \mathcal{D} \times P,$$

avec $\mathcal{D} = \{ |z| < 1, z \in \mathbb{C} \}$, $\mathcal{D}_1 = \{ z = (x, 0) \mid |x| < 1, x \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^2 \} = \mathcal{D} \times 0$ et $\mathcal{D}_2 = \{ z = (0, x), |x| < 1, x \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^2 \} = 0 \times \mathcal{D}$.

²⁴Cf. § 0.2.2.

Preuve du sous-lemme. Notons $\mathcal{V} = (\mathcal{M}_P^a, V_j)_{j \in A}$ un germe de recouvrement ouvert du germe de variété $(\mathcal{M}_P^a, U_{P,i})$ où A est un ensemble fini. Localement, sur tout ouvert (\mathcal{M}_P^a, V_j) , il existe un germe, le long de V_j , de champ de vecteur holomorphe Z_j tel que :

1. Le germe de champ de vecteur Z_j est tangent à $\Lambda_P^a(D_m)$, $m = 1, 2$.
2. Le germe de champ de vecteur Z_j est tangent à $\sigma_P^a(i)$.
3. Le germe de champ de vecteur $D\pi_P^a.Z_j = 1$.

De plus $\sigma_P^a(i)$ est de dimension 1, ouverte, donc de Stein. D'après un théorème classique Siu [Siu], elle possède un système fondamental de voisinage de Stein $(W_\alpha)_\alpha$ dans \mathcal{M}_P^a . Choisissons α_0 pour que $W = W_{\alpha_0}$ soit recouvert par des ouverts de Stein U_j , $j \in A$, sur lesquels Z_j sont définis holomorphes. Le faisceau \mathcal{X}_W^v de base W des champs de vecteurs holomorphes Z tangents aux variétés $\Lambda_P^a(D_1)$ et $\Lambda_P^a(D_2)$ et qui sont verticaux i.e. $D\pi_P^a.Z = 0$. Trivialement $Z_{ij} = Z_j - Z_i$ définit un élément $[Z_{ij}]$ de $H^1(U_j, \mathcal{X}_W^v) = H^1(W, \mathcal{X}_W^v)$. Cet espace de cohomologie est nul puisque W est de Stein et \mathcal{X}_W^v est cohérent. Ainsi, il existe $(Y_j)_{j \in A}$ un élément du $H^0(W, \mathcal{X}_W^v)$ tel que $Z_j - Z_i = Y_j - Y_i$ pour tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Le champ de vecteurs $Z_j - Y_j$ se recolle en un champ Z sur W , est tangent à $\Lambda_P^a(D_1)$ et $\Lambda_P^a(D_2)$ et vérifie $D\pi_P^a.Z = 0$. En restriction à $\sigma_P^a(i)$, le champ Z est relié par π_P^a au champ $\frac{\partial}{\partial t}$ de \mathbb{C} . Au voisinage du compact $[0, 1] \cap \Lambda_P^a(D_1) \cap \Lambda_P^a(D_2)$, le flot de Z est défini pour un temps décrivant un voisinage compact de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} et pour des conditions initiales décrivant un voisinage assez petit, dans $(\pi_P^a)^{-1}(0)$ de $\sigma_{\omega_0}(i)$. Ceci donne une rectification globale d'un voisinage de $\Lambda_P^a(D_1) \cap \Lambda_P^a(D_2)$. ■

De la même manière, nous avons le :

Sous-lemme 2.1.9 *Fixons i un point singulier du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\varpi$ régulier du diviseur D_ϖ et notons D_1 la composante irréductible de D_ϖ qui vérifie $D_1 \ni i$. Alors il existe un germe de biholomorphisme*

$$f_i : (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i}) \rightarrow (\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \times P$$

tel que

$$f_i(\Lambda_P^a(D_1)) = \mathcal{D} \times 0 \times P,$$

avec $\mathcal{D} = \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$, $\mathcal{D}_1 = \{z = (x, 0) \mid |x| < 1, x \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^2\} = \mathcal{D} \times 0$ et $\mathcal{D}_2 = \{z = (0, x), |x| < 1, x \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^2\} = 0 \times \mathcal{D}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 2.1.7 de trivialisaton analytique locale :

Preuve du lemme 2.1.7. Il nous reste à modifier les biholomorphismes locaux donnés par les deux sous-lemmes précédents pour qu'ils coïncident avec φ sur le diviseur. Fixons $i \in \Sigma_\varpi$, deux cas se présentent :

1. Le point i est un point singulier du diviseur D_ϖ .

Notons D_1, D_2 les composantes irréductibles du diviseur D_ϖ telles que $D_1 \cap D_2 = i$. Donnons nous à l'aide de cartes des biholomorphismes :

$$\xi_{P,i} : (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i}) \rightarrow (\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \times P$$

et

$$\xi_i : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \times P \rightarrow (\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \times P$$

Ce dernier biholomorphisme, d'après le lemme 2.1.8, vérifie :

$$\xi_i(\Lambda_{\omega_0}(D_1) \times P) = \xi_{P,i}(\Lambda_P^a(D_1)) = \mathcal{D} \times 0 \times P$$

et

$$\xi_i(\Lambda_{\omega_0}(D_2) \times P) = \xi_{P,i}(\Lambda_P^a(D_2)) = 0 \times \mathcal{D} \times P.$$

Notons $\varphi_{P,1}$ la restriction de φ_P à $\Lambda_{\omega_0}(D_1) \times P$ et $\varphi_{P,2}$ celle de φ_P à $\Lambda_{\omega_0}(D_2) \times P$. Leur expression dans les cartes est du type suivant :

$$\begin{aligned} \xi_{P,i} \circ \varphi_{P,1} \circ \xi_i^{-1} & : \mathcal{D} \times 0 \times P \rightarrow \mathcal{D} \times 0 \times P, \\ (x, 0, s) & \mapsto (\tilde{\varphi}_1(x, s), 0, s) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_{P,i} \circ \varphi_{P,2} \circ \xi_i^{-1} & : 0 \times \mathcal{D} \times P \rightarrow 0 \times \mathcal{D} \times P, \\ (0, y, s) & \mapsto (0, \tilde{\varphi}_2(y, s), s) \end{aligned}$$

Ces applications sont holomorphes par construction de φ_P .

Nous définissons φ_P^a dans les cartes en posant

$$\xi_{P,i} \circ \varphi_P^a \circ \xi_i^{-1}(x, y, s) = (\tilde{\varphi}_1(x, s), \tilde{\varphi}_2(y, s), s)$$

qui est l'application recherchée.

2. Le point i est un point régulier du diviseur D_∞ .

Notons D_1 la composante irréductible du diviseur D_∞ telle que $D_1 \ni i$.

D'après le lemme 2.1.9, il existe une carte

$$\xi_i : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \times P \rightarrow (\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \times P$$

et une carte

$$\xi_{P,i} : (\mathcal{M}_P^a, U_{P,i}) \rightarrow (\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \times P$$

qui vérifient

$$\xi_i(\Lambda_{\omega_0}(D_1) \times P) = \xi_{P,i}(\Lambda_P^a(D_1)) = \mathcal{D} \times 0 \times P$$

Notons $\varphi_{P,1}$ la restriction de φ_P à $\Lambda_{\omega_0}(D_1) \times P$ dont l'expression dans les cartes est du type suivant :

$$\begin{aligned} \xi_{P,i} \circ \varphi_{P,1} \circ \xi_i^{-1} & : \mathcal{D} \times 0 \times P \rightarrow \mathcal{D} \times 0 \times P, \\ (x, 0, s) & \mapsto (\tilde{\varphi}_1(x, s), 0, s) \end{aligned}$$

Cette application est par construction holomorphe. Nous définissons φ_P^a dans les cartes en posant

$$\xi_{P,i} \circ \varphi_P^a \circ \xi_i^{-1}(x, y, s) = (\tilde{\varphi}_1(x, s), y, s)$$

qui est l'application recherchée.

Ce qui conclut la preuve de ce lemme. ■

Section 2.2. : Définition d'une nouvelle structure holomorphe sur le germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$.

2.2 Définition d'une nouvelle structure holomorphe sur le germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$.

Reprenons les notations précédentes, nous venons de construire un pont \mathcal{C}^∞ $((\mathcal{M}_P^a, D_P^a), \pi_P^a, \nu_0, \nu_1), \Sigma_P^a, \varphi_P)$ entre les germes de feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$. Ici, la structure holomorphe de \mathcal{M}_P^a sera appelée structure holomorphe standard. Fixons un atlas \mathcal{A}_P^{st} de cette structure. Dans ce paragraphe, nous construisons une nouvelle structure holomorphe sur la variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$, définie par un nouvel atlas $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$, pour laquelle le déploiement $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$, l'application

$$\varphi_P : (D_{\omega_0} \times P, \mathcal{A}_{\omega_0 \times P|D_{\omega_0} \times P}^a) \rightarrow (D_P^a, \mathcal{A}_P^{st|D_P^a}),$$

la submersion $pr_2 : \mathcal{M}_{\omega_0} \times P \rightarrow P$ et le plongement $\mathcal{M}_{\omega_0} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\omega_0} \times \{0\} \subset \mathcal{M}_{\omega_0} \times P$ sont tous quatre holomorphes.

Notons $\mathcal{U} = (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma C(\varpi)}$ un germe de recouvrement adapté²⁵ du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$ tel que pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$, l'application φ_P^a , obtenue au lemme 2.1.7, est holomorphe sur l'ouvert $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \times P$ où $\Sigma C(\varpi) = \Sigma_{\varpi} \cup \text{Comp}(D_{\varpi})$.

Fixons une submersion holomorphe

$$\rho : \bigsqcup_{i \in \text{Comp}(D_{\varpi})} (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow \bigsqcup_{i \in \text{Comp}(D_{\varpi})} U_i$$

qui vaut l'identité sur U_i et donc qui est transverse au feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} .

Tout d'abord, nous allons nous donner des atlas appropriés, pour la construction que nous voulons faire, sur les espaces \mathcal{M}_{ω_0} , $\mathcal{M}_{\omega_0} \times P$ et \mathcal{M}_P^a qui décrivent encore la structure holomorphe standard, fixant ainsi les notations. Puis nous énoncerons quelle est la nouvelle structure complexe que nous considérons sur

$$(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P).$$

– Atlas approprié sur un voisinage $\mathcal{V}(D_{\omega_0})$ de D_{ω_0} dans \mathcal{M}_{ω_0} .

Nous décrivons la structure holomorphe standard sur la variété $\mathcal{V}(D_{\omega_0})$ au moyen d'un atlas que nous notons $\mathcal{A}_{\omega_0}^{st}$ ainsi défini :

$$\mathcal{A}_{\omega_0}^{st} = (\mathcal{V}(V_i), \xi_i)_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}}, \quad \xi_i : \mathcal{V}(V_i) \rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{D} \text{ où } A \text{ est un ensemble fini et } \mathcal{D} = \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\},$$

tel que :

1. V_i est un ouvert 1-connexe de D_{ω_0} et $\mathcal{V}(V_i)$ est un voisinage ouvert 1-connexe de V_i dans \mathcal{M}_{ω_0} .
2. Pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$,

(a) l'ouvert $\mathcal{V}(V_i)$ est un voisinage de $\sigma_{\omega_0}(i)$, biholomorphe à un polydisque, qui vérifie :

$$\mathcal{V}(V_i) \cap \Sigma_{\omega_0} = \sigma_{\omega_0}(i),$$

²⁵ Cf. § 0.2.2.

(b) l'ouvert V_i est inclus dans l'ouvert U_i de \mathcal{U} et vérifie :

$$\xi_i(V_i \cap D_{\omega_0}) = \begin{cases} \{\mathcal{D} \times 0\} \cup \{0 \times \mathcal{D}\} & \text{si } i \text{ est un point singulier de } D_{\varpi} \\ \{\mathcal{D} \times 0\} & \text{si } i \text{ est un point régulier de } D_{\varpi} \end{cases}$$

avec $\mathcal{D} = \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$.

3. L'ensemble $(V_i)_{i \in A}$ forme un recouvrement ouvert de $D_{\omega_0} - \Sigma_{\omega_0} = \bigcup_{j \in \text{Comp}(D_{\varpi})} U_j$.

4. Pour tout $i \in A$, l'ouvert $\mathcal{V}(V_i)$ n'intersecte pas Σ_{ω_0} , rencontre une unique composante irréductible de D_{ω_0} et nous avons l'égalité :

$$\xi_i(V_i) = \mathcal{D} \times 0.$$

5. Le sous-atlas $(\mathcal{V}(V_i), \xi_i)_{i \in A}$ est un atlas distingué pour le feuilletage régulier $\mathcal{F}_{\omega_0 | \bigcup_{i \in A} \mathcal{V}(V_i)}$ et est compatible avec la fibration ρ : Pour chaque carte $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i})_{i \in A}$, les fibres $\{\xi_{1,i} = \text{cste}\}$ sont les fibres de ρ et les fibres $\{\xi_{2,i} = \text{cste}\}$ sont les plaques de $\mathcal{F}_{\omega_0 | \mathcal{V}(V_i)}$.

En particulier, pour $i, j \in A$, les changements de cartes sont à "variables séparées" ; i.e. $\xi_{1,i} = g_{1,i,j} \circ \xi_{1,j}$ et $\xi_{2,i} = g_{2,i,j} \circ \xi_{2,j}$ où les $g_{r,i,j}$ sont des biholomorphismes inversibles, $r = 1, 2$.

– Atlas approprié sur le voisinage $\mathcal{V}(D_{\omega_0}) \times P$ de $D_{\omega_0} \times P$ dans $\mathcal{M}_{\omega_0} \times P$.

Nous décrivons la structure holomorphe standard sur la variété $\mathcal{V}(D_{\omega_0}) \times P$ au moyen de l'atlas que nous notons $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^{st}$ défini au moyen de l'atlas $\mathcal{A}_{\omega_0}^{st}$ par :

$$\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^{st} = (\mathcal{V}(V_i) \times P, \xi_i \times id_P)_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}},$$

où id_P est l'application identité.

– Atlas approprié sur un voisinage $\mathcal{V}(D_P^a)$ de D_P^a dans \mathcal{M}_P^a .

En conservant ces nouvelles notations. Nous décrivons la structure holomorphe standard sur la variété $\mathcal{V}(D_P^a)$ au moyen d'un atlas que nous notons \mathcal{A}_P^{st} ainsi défini :

$$\mathcal{A}_P^{st} = (\mathcal{V}(V_{P,i}), \xi_{P,i})_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}}$$

tel que :

1. $V_{P,i}$ est un ouvert de D_P^a qui vérifie $V_{P,i} = \varphi_P(V_i \times P)$ et $\mathcal{V}(V_{P,i})$ est un voisinage ouvert 1-connexe de $V_{P,i}$ dans \mathcal{M}_P^a .

2. Pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$, l'ouvert $\mathcal{V}(V_{P,i})$ est un voisinage de $\sigma_P^a(i)$, contenant $\varphi_P^a(V_i \times P)$, biholomorphe à un polydisque $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times P$ tel que

$$\xi_{P,i}(V_{P,i}) = \begin{cases} \{\mathcal{D} \times 0 \times P\} \cup \{0 \times \mathcal{D} \times P\} & \text{si } i \in \text{Sing}(D_{\varpi}) \\ \{\mathcal{D} \times 0 \times P\} & \text{si } i \text{ est un point régulier de } D_{\varpi} \end{cases}$$

avec $\mathcal{D} = \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$.

Un tel ouvert $V_{P,i}$ existe d'après le lemme 2.1.7.

3. Pour tout $i \in A$ nous avons égalité $\xi_{P,i}(V_{P,i}) = \{\mathcal{D} \times 0 \times P\}$.

4. Les cartes $\xi_{P,i}$ sont compatibles aux projections : $pr_2 \circ \xi_{P,i} = \pi_P^a$, où $pr_2 : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times P \rightarrow P$ et $\pi_P^a : \mathcal{V}(V_{P,i}) \rightarrow P$ sont les projections naturelles.

– On note $\tilde{\mathcal{A}}_P^{st} = (V_{P,i}, \tilde{\xi}_{P,i})_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}}$ l'atlas induit par \mathcal{A}_P^{st} sur D_P^a défini par $\tilde{\xi}_{P,i} = \xi_{P,i}|_{V_{P,i}}$.

Section 2.2. : Définition d'une nouvelle structure holomorphe sur le germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$.

Ces atlas étant maintenant défini, nous pouvons mettre en évidence une nouvelle structure holomorphe sur le voisinage ouvert $\mathcal{V}(D_{\omega_0}) \times P$:

Définition 2.2.1 *On considère sur le voisinage ouvert $\mathcal{V}(D_{\omega_0}) \times P$ de $D_{\omega_0} \times P$ dans $\mathcal{M}_{\omega_0} \times P$ l'atlas*

$$\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a = (\mathcal{V}(V_i) \times P, \zeta_{P,i})_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}}$$

où l'application $\zeta_{P,i}$ est définie par

$$\zeta_{P,i} = \begin{cases} ((\tilde{\xi}_{P,i} \circ \varphi_P \circ \rho), \xi_{2,i}) & \text{si } i \in A. \\ \xi_{P,i} \circ \varphi_P^a & \text{si } i \in \Sigma_{\varpi}. \end{cases}$$

et où les applications φ_P^a et φ_P sont construites dans le paragraphe précédent et $(\mathcal{V}(V_i) \times P, (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, id_P))$ est la carte de l'atlas $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^{st}$.

La carte $(\mathcal{V}(V_i) \times P, \zeta_{P,i})$ se représente, pour $i \in A$, par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(V_i) \times P & \xrightarrow{\xi_{2,i}} & 0 \times \mathcal{D} \times 0 \\ \downarrow \rho & & \\ V_i \times P & & \\ \downarrow \varphi_P & & \\ V_{i,P} & \xrightarrow{\tilde{\xi}_{P,i}} & \mathcal{D} \times 0 \times P \end{array}$$

Proposition 2.2.2 *L'atlas $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$ définit une structure holomorphe sur la variété $\mathcal{V}(D_{\omega_0}) \times P$.*

Preuve. Vérifions que les changements de cartes sont des biholomorphismes. Considérons deux ouverts $\mathcal{V}(V_i) \times P, \mathcal{V}(V_j) \times P$ d'intersection non vide :

- Si $i \in A$ et $j \in \Sigma_{\varpi}$, le cas est trivial. En effet, sur $\mathcal{V}(V_j) \times P, j \in \Sigma_{\varpi}$, φ_P^a est un biholomorphisme [Lemme 2.1.7]. Sur $V_i \cap V_j, \varphi_P$ est aussi un biholomorphisme (de par sa construction). Toutes les applications composant le changement de carte sont holomorphes.
- Si $i, j \in A$, le changement de carte est

$$\zeta_{P,i} \circ \zeta_{P,j}^{-1} = (\tilde{\xi}_{P,i} \circ \tilde{\xi}_{P,j}^{-1}, \xi_{2,i} \circ \xi_{2,j}^{-1})$$

qui est holomorphe.

Ce qui démontre cette assertion. ■

2.2.1 Quelques propriétés de l'espace $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ muni de sa nouvelle structure holomorphe.

Lemme 2.2.3 *Le déploiement constant $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$ est holomorphe.*

Preuve. Considérons deux cas :

- Sur les ouverts $\mathcal{V}(V_i) \times P, i \in A$.

Les ouverts $\mathcal{V}(V_i) \times P, i \in A$, sont des flow-box du feuilletage, en effet les plaques sont encore les courbes de niveaux $\xi_{2,i} = cste$. De plus l'application

$$\zeta_{P,i} \circ \zeta_{P,j}^{-1} = (\tilde{\xi}_{P,i} \circ \tilde{\xi}_{P,j}^{-1}, \xi_{2,i} \circ \xi_{2,j}^{-1})_{i,j \in A}$$

préserve les courbes $y = cste$ de $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times P$ (fait qui ne dépend que de l'application $\xi_{2,i} \circ \xi_{2,j}^{-1}$). Ainsi les changements de cartes $\zeta_{P,i} \circ \zeta_{P,j}^{-1}$ avec $i, j \in A$ respectent la partition induite par le feuilletage régulier $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$ sur $\bigcup_{i \in A} \mathcal{V}(V_i) \times P$. Les changements de cartes étant holomorphes,

le feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$ $|_{\bigcup_{i \in A} \mathcal{V}(V_i)}$ est holomorphe.

– Sur les ouverts $\mathcal{V}(V_i) \times P$, $i \in \Sigma_{\varpi}$.

L'application φ_P^a étant holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{V}(V_i) \times P$, pour tout $i \in \Sigma_{\varpi}$, le caractère holomorphe du feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$ sur cet ouvert n'a pas été modifié. Il est toujours holomorphe.

Le déploiement conserve bien son caractère holomorphe. ■

Lemme 2.2.4 *L'application*

$$\varphi_P : \left(D_{\omega_0} \times P, \mathcal{A}_{\omega_0 \times P | D_{\omega_0} \times P}^a \right) \rightarrow \left(D_P^a, \mathcal{A}_{P | D_P^a}^{st} \right)$$

est un biholomorphisme.

Preuve. Montrons que l'expression de φ_P dans les cartes est une application holomorphe. Fixons $V_i \times P$ un ouvert de $D_{\omega_0} \times P$. L'expression de φ_P , dans la carte associée à cet ouvert, est $\tilde{\xi}_{P,j} \circ \varphi_P \circ \zeta_{P,i}^{-1} |_{D_{\omega_0} \times P}$ qui n'est autre que l'identité, après simplification. Ainsi φ_P est holomorphe. ■

Définition 2.2.5 *L'atlas $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a = (\mathcal{V}(V_i) \times P, \zeta_{P,i})_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}}$ sur $\mathcal{V}(D_{\omega_0}) \times P$ définit un germe d'atlas holomorphe sur la variété germifiée $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ que nous notons par abus de langage $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a = ((\mathcal{M}_{\omega_0}, V_i) \times P, \zeta_{P,i})_{i \in A \cup \Sigma_{\varpi}}$.*

2.3 Conclusion

Pour finir la démonstration du Théorème A, il reste à construire un déploiement marqué $\mathcal{F}_{\eta}^{\mathcal{M}}$ équiréductible de \mathcal{F}_{ω_0} de paramètre P le long de $0 \times P$ qui vérifie : il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\eta | \Pi_{\eta}^{-1}(1)} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible²⁶ aux marquages. Rappelons que P symbolise le germe $(\mathbb{C}, [0, 1])$. Le seul résultat que nous utilisons des paragraphes précédents est l'existence de l'atlas holomorphe, noté $\mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$, sur $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P)$ que nous venons de construire et qui est tel que le déploiement $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$, l'application

$$\varphi : D_{\omega_0} \times \{1\} \rightarrow D_{\omega_1},$$

la submersion

$$pr_2 : \mathcal{M}_{\omega_0} \times P \rightarrow P$$

et le plongement

$$\mathcal{M}_{\omega_0} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\omega_0} \times \{0\} \subset \mathcal{M}_{\omega_0} \times P$$

sont tous quatre holomorphes quand on munit $\mathcal{M}_{\omega_0} \times P$ de cette nouvelle structure. Nous allons voir que $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)$ est biholomorphe à une variété obtenue à partir de $\mathbb{C}^2 \times P$ par une succession d'éclatements de centres étales au-dessus de P . Le déploiement de \mathcal{F}_{ω_0} recherché est l'image de $\mathcal{F}_{\omega_0} \times P$ par ce biholomorphisme.

²⁶Cf. § 1.2.2.

Nous utiliserons le théorème de Grauert à paramètre cité dans [Mat₁] : Notons toujours $\tilde{\mathbb{C}}^2$ la variété obtenue par éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 , $\Pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \times P \rightarrow P$ la projection canonique et $i_0 : \mathbb{P}^1 \times P \hookrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2 \times P$ le plongement naturel.

Théorème 2.3.1 *Soit $(\mathcal{M}, \pi_P, i_P)$ une variété holomorphe de dimension 3 munie d'une submersion holomorphe $\pi_P : \mathcal{M} \rightarrow P$ et d'un plongement holomorphe $i_P : \mathbb{P}^1 \times P \hookrightarrow \mathcal{M}$ vérifiant $\Pi|_{\mathbb{P}^1 \times P} = \pi_P \circ i_P$. Si on suppose que l'auto-intersection du diviseur $i_P(\mathbb{P}^1 \times \{0\})$ dans $\mathcal{M}|_{\pi_P^{-1}(0)}$ est -1 alors il existe :*

1. un voisinage W de $i_P(\mathbb{P}^1 \times P)$ dans \mathcal{M} ,
2. un voisinage \tilde{W} de $i_0(\mathbb{P}^1 \times P)$ dans $\tilde{\mathbb{C}}^2 \times P$,
3. un biholomorphisme $H : W \rightarrow \tilde{W}$ vérifiant :

(a) l'égalité $i_0 = H \circ i_P$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{P}^1 \times P & & \\ & i_P \swarrow & \circlearrowleft & \searrow i_0 & \\ W & \longrightarrow & \xrightarrow{H} & \longrightarrow & \tilde{W} \end{array}$$

(b) l'égalité $\pi_P = \Pi \circ H$:

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & \xrightarrow{H} & \longrightarrow & \tilde{W} \\ & \pi_P \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \Pi & \\ & & P & & \end{array}$$

En contractant le long de chaque fibre de π_P le diviseur $i_P(\mathbb{P}^1 \times P)$ de \mathcal{M} , on obtient immédiatement le :

Corollaire 2.3.2 *Il existe :*

- une variété holomorphe \mathcal{M}_1 munie d'une submersion $\pi_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow P$,
- une courbe lisse $\Gamma \subset \mathcal{M}_1$ telle que $\pi_1|_{\Gamma}$ est un biholomorphisme et
- un biholomorphisme $G : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_1$ qui vérifie

$$G \circ i_P(\mathbb{P}^1 \times P) = E_1^{-1}(\Gamma) \text{ et } \tilde{\pi}_1 \circ G = \pi_P$$

où $\tilde{\pi}_1 = \pi_1 \circ E_1$ et $E_1 : \tilde{\mathcal{M}}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$ est l'application d'éclatement de la courbe Γ de \mathcal{M}_1 .

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P & & & \\ & & \pi_P \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow \tilde{\pi}_1 & & \\ i_P(\mathbb{P}^1 \times P) \subset & \mathcal{M} & \xrightarrow{G} & \tilde{\mathcal{M}}_1 & & & \\ & \searrow & \circlearrowleft & \swarrow E_1 & \searrow \tilde{\pi}_1 & & \\ & \Gamma & \subset & \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & P & \end{array}$$

Sous les hypothèses du **Théorème A**, en conservant les notations et les résultats de ce chapitre, nous avons le :

Lemme 2.3.3 *Considérons $((\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)$ la variété holomorphe obtenue par la définition 2.2.1, alors il existe :*

- Une variété holomorphe $((\mathcal{M}_P, D_P), \mathcal{A}^{st})$ obtenue par une succession d'éclatements de $(\mathbb{C}^2 \times P, 0 \times P)$, munie de sa structure holomorphe naturelle, de centre des courbes lisses et étales²⁷ au-dessus de P ,
- La projection $\tilde{\Pi}_P : \mathcal{M}_P \rightarrow P$ et
- Un germe de biholomorphisme

$$H : ((\mathcal{M}_P, D_P), \mathcal{A}^{st}) \rightarrow ((\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a)$$

qui commute aux projections : $\tilde{\Pi}_P = pr_2 \circ H$ où $pr_2 : \mathcal{M}_{\omega_0} \times P \rightarrow P$.

Preuve. Nous effectuons une récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de D_{ω_0} .

- Initialisation : $\#Comp(D_{\omega_0}) = 1$.

Ce cas est réglé par le théorème de Grauert à paramètre, cité ci-dessus.

- Propagation : $\#Comp(D_{\omega_0}) = n > 1$.

Ordonnons les composantes de D_{ω_0} , $Comp(D_{\omega_0}) = \{D_1, \dots, D_n\}$ de sorte que $\langle D_n, D_n \rangle = -1$. En appliquant le corollaire 2.3.2 à $D_n \times P \subset \mathcal{M}_{\omega_0} \times P$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 ((\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}), \mathcal{A}^{st}) & & & & P \\
 \downarrow \nu_1 & \nearrow pr_2 & \circlearrowleft & & \searrow \tilde{\pi}_1 \\
 (\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a & \longrightarrow \longrightarrow & \longrightarrow \xrightarrow{G} \longrightarrow & & ((\tilde{\mathcal{M}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_1), \tilde{\mathcal{A}}_1) \\
 & \searrow & \downarrow (E_{\omega_0}^{(h-1)} \times id) & \circlearrowleft & \downarrow E_1 \\
 & pr_2 & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & P & \longleftarrow \longleftarrow \pi_1 & \longleftarrow ((\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_1), \mathcal{A}_1)
 \end{array}$$

Où :

- \mathcal{M}_1 est une variété holomorphe de dimension 3 munie d'une submersion $\pi_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow P$,
- G est un biholomorphisme,

$$G : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a \rightarrow ((\tilde{\mathcal{M}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_1), \tilde{\mathcal{A}}_1),$$

qui vérifie

$$G(D_{\omega_0} \times P) = E_1^{-1}(\Gamma) \text{ et } \tilde{\pi}_1 \circ G = pr_2,$$

- Γ est la courbe $(\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_1)$ obtenue en collapsant la composante $D_n \times P$,
- $E_1 : \tilde{\mathcal{M}}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$ est l'application d'éclatement de la courbe Γ ,
- $\tilde{\pi}_1$ est l'application $\pi_1 \circ E_1$,

Et où :

- \mathcal{D}_1 est l'espace analytique $(E_{\omega_0}^{(h-1)}(D_{\omega_0}) \times P)$,
- $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est l'espace analytique $E_1^{-1}(\mathcal{D}_1)$,

²⁷Pour être précis, cette succession d'éclatements a toutes les propriétés d'une désingularisation par éclatements d'un déploiement équisingulier, mis à part qu'ici il n'y a pas de feuilletage.

- $\mathcal{A}_1, \tilde{\mathcal{A}}_1$ sont les structures complexes induites,
- ν_1 est un plongement tel que

$$\nu_1 : ((\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}), \mathcal{A}^{st}) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \{1\}, D_{\omega_0} \times \{1\}), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a$$

est un biholomorphisme,

- $(E_{\omega_0}^{(h-1)}, id)$ est l'application de contraction du diviseur $D_n \times P$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons l'existence :

1. d'une variété holomorphe $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ obtenue par une succession d'éclatements de $(\mathbb{C}^2 \times P, 0 \times P)$, vérifiant les propriétés voulues,
2. d'une projection $\rho : \mathcal{M} \rightarrow P$ et
3. d'un germe de biholomorphisme $\tilde{H} : ((\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_1), \mathcal{A}_1) \rightarrow ((\mathcal{M}, \mathcal{D}), \mathcal{A}^{st})$ qui commute aux projections : $\rho \circ \tilde{H} = \pi_1$.

Par éclatement, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 ((\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}), \mathcal{A}^{st}) & & & & \\
 \downarrow \nu_1 & & & & \\
 (\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, D_{\omega_0} \times P), \mathcal{A}_{\omega_0 \times P}^a & & & & \\
 \downarrow G & & & & \\
 ((\tilde{\mathcal{M}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_1), \tilde{\mathcal{A}}_1) & \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} & \begin{array}{c} P \\ \circlearrowleft \\ \xrightarrow{G_1} \end{array} & \xrightarrow{\pi_P} & ((\mathcal{M}_P, \mathcal{D}_P), \mathcal{A}^{st}) \\
 \downarrow E_1 & & \circlearrowleft & & \downarrow E \\
 ((\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_1), \mathcal{A}_1) & \xrightarrow{\tilde{H}} & \longrightarrow & & ((\mathcal{M}, \mathcal{D}), \mathcal{A}^{st})
 \end{array}$$

Où :

- $E : ((\mathcal{M}_P, \mathcal{D}_P), \mathcal{A}^{st}) \rightarrow ((\mathcal{M}, \mathcal{D}), \mathcal{A}^{st})$ est l'application d'éclatement de centre $\tilde{H}(E_{\omega_0}^{(h-1)}(D_n) \times P)$,
- π_P est l'application $\rho \circ E$,
- \mathcal{D} est l'espace analytique $\tilde{H}(\mathcal{D}_1)$,
- \mathcal{D}_P est l'espace analytique $E^{-1}(\mathcal{D})$ et
- G_1 est l'application \tilde{H} remontée par éclatements.

Le biholomorphisme H recherché est $G_1 \circ G$.

La récurrence est alors vérifiée, ce qui termine la démonstration du lemme 2.3.3. ■

2.3.1 Fin de la démonstration du Théorème A.

Pour conclure la démonstration du **Théorème A**, nous utilisons le lemme 2.3.3 et conservons ses notations. Nous définissons le germe de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\eta = H^*(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \times P)$ sur $(\mathcal{M}_P, \mathcal{D}_P)$. Par collapsage, ce feuilletage définit le déploiement cherché \mathcal{F}_η de \mathcal{F}_{ω_0} de paramètre P , le long de $0 \times P$.

Les applications de marquage du déploiement \mathcal{F}_η sont définies par composition :

$$\begin{aligned}\Lambda_\eta &= \Lambda_{\omega_0} \circ H \\ \sigma_\eta &= \sigma_{\omega_0 \times P} \circ H \\ [\Gamma_\eta, D]_{D \in \text{Comp}(D_\varpi)} &= [(\Gamma_{\omega_0, D} \times P) \circ H]_{D \in \text{Comp}(D_\varpi)}.\end{aligned}$$

De par sa construction, \mathcal{F}_η est un déploiement SL-équisingulier. Trivialement \mathcal{F}_{ω_1} et $\mathcal{F}_{\eta|_{\Pi_\eta^{-1}(1)}}$ sont SL-équivalents. Enfin, remarquons que l'application

$$\Psi = \varphi \circ H|_{\Pi_\eta^{-1}(1)} : (D_{\eta|_{\Pi_\eta^{-1}(1)}}, \mathcal{A}^{st}) \rightarrow (D_{\omega_1}, \mathcal{A}^{st})$$

est par composition holomorphe et compatible²⁸ aux marquages par \mathcal{F}_ϖ , en effet φ et H sont toutes deux isotopes à l'identité.

Le feuilletage marqué $\mathcal{F}_{\omega_2}^{\mathcal{M}}$ est ainsi

$$(\mathcal{F}_{\eta|_{\Pi_\eta^{-1}(1)}}, \Lambda_{\eta|_{\Pi_\eta^{-1}(1)}}, \sigma_{\eta|_{\Pi_\eta^{-1}(1)}}, \left[(\Gamma_\eta, D)_{\eta|_{\Pi_\eta^{-1}(1)}} \right]_{D \in \text{Comp}(D_\varpi)}),$$

ce qui conclut la démonstration du Théorème A, ainsi que ce chapitre.

²⁸Cf. § 1.2.2.

...

3 Démonstration du Théorème B.

Théorème B Soient deux germes de feuilletages holomorphes, $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$, de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2^o espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} . S'ils sont *SL*-équivalents alors ils sont faiblement *SL*-reliés.

En utilisant le **Théorème A**, le **Théorème B** se ramène à la problématique suivante :

Lemme Clé B1 Considérons deux germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2^o espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , *SL*-équivalents. Supposons qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible²⁹ aux marquages.

Alors les germes de feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ sont faiblement *SL*-reliés.

La démonstration de ce lemme clé est l'objet principal de ce chapitre. Le plan de cette démonstration a été donné dans l'introduction, nous y renvoyons le lecteur.

3.1 Digression nécessaire sur les germes d'automorphisme d'un germe de feuilletage

3.1.1 Définitions

Dans ce qui suit, adoptons les notations suivantes : Pour M une variété holomorphe munie d'un feuilletage \mathcal{F} holomorphe singulier de dimension quelconque, et pour $A \subset M$, nous notons :

- $Diff(M, A)$ le groupe des germes, le long de A , de biholomorphismes $\Phi : (M, A) \rightarrow (M, A)$ tels que $\Phi(A) = A$.
- $Diff_0(M, A)$ le sous-groupe de $Diff(M, A)$ des germes qui sont l'identité en restriction à A .
- $Aut(\mathcal{F}|_{(M,A)})$ le sous-groupe de $Diff(M, A)$ des germes qui laissent le feuilletage \mathcal{F} invariant, appelé groupe des germes, le long de A , d'automorphismes du feuilletage \mathcal{F} .
- $Aut_0(\mathcal{F}|_{(M,A)})$ le sous-groupe de $Aut(\mathcal{F}|_{(M,A)})$ des germes qui sont l'identité en restriction à A .

Définition 3.1.1 Un germe de biholomorphisme f de (M, A) est un automorphisme fixant du feuilletage, $f \in Fix(\mathcal{F}|_{(M,A)})$, si pour tout U voisinage ouvert de A dans M il existe V un voisinage ouvert de A dans M inclus dans U tel que si x et $f(x)$ appartiennent à V alors x et $f(x)$ sont dans une même feuille de la restriction $\mathcal{F}|_V$ du feuilletage \mathcal{F} à l'ouvert V . Le groupe $Fix(\mathcal{F}|_{(M,A)})$, ainsi défini, est un sous-groupe de $Aut(\mathcal{F}|_{(M,A)})$.

Il est important de remarquer que les éléments de $Fix(\mathcal{F}|_{(M,A)})$ ne sont pas forcément l'identité sur A .

Considérons maintenant \mathcal{F}_{ω} un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Notons s un point singulier du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega}$ contenu dans une composante irréductible D de D_{ω} , U_s un "petit" voisinage ouvert connexe de s contenu dans D_{ω} et U_D l'ouvert $D - \Sigma_{\omega}$. Notons indifféremment $A = \{s\}$ ou $A = U_s \cap U_D$.

²⁹Cf. § 1.2.2.

Nous rappelons (Cf. § 0.4.2.) que nous notons $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \times P|_{(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, A \times [0,1])}$ le germe de déploiement constant de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)}$ de paramètre $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$. C'est un germe de feuilletage de codimension 1 sur la variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, A) \times P$ dont les feuilles sont le produit des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ par P .

Définition 3.1.2 *Nous disons qu'un élément $f \in \text{Diff}(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)$ est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $\text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)})$ si il existe un germe de biholomorphisme $H \in \text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \times P|_{(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, A \times [0,1])})$ tel que :*

- $H(m, t) = (H_t(m), t)$, $t \in P$,
- $H_0 = \text{id}$ et $H_1 = f$.

En fait, ici, dans chaque feuille de \mathcal{F}_{ω_0} , H définit une isotopie qui relie f à l'identité.

Nous rappelons (Cf. § 0.3.2.) que $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, A \times [0,1])}^{\text{cste}}$ désigne le germe de la déformation constante de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)}$ de paramètre $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$ sur le germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, A \times [0, 1])$. C'est un germe de feuilletage de dimension 1, sur cette variété, qui est sur chaque fibre de $\mathcal{M}_{\omega_0} \times t$, la réplique de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)}$.

Définition 3.1.3 *Un élément $f \in \text{Diff}(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)$ sera dit holomorphiquement isotope à l'identité dans $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, A)})$ si il existe un germe de biholomorphisme $H \in \text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0} \times P, A \times [0,1])}^{\text{cste}})$ tel que :*

- $H(m, t) = (H_t(m), t)$, $t \in P$,
- $H_0 = \text{id}$ et $H_1 = f$.

3.1.2 Classe d'isotopie de germes d'automorphisme de $\text{Fix}(\mathcal{F}_{\omega_0})$ et de $\text{Aut}_0(\mathcal{F}_{\omega_0})$ pour un feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} de 2^o espèce générale.

La proposition suivante n'est pas exhaustive. Nous n'énonçons que les éléments qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 3.1.4 *Considérons un germe de feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singulier à l'origine, de 2^o espèce générale, marqué par \mathcal{F}_{ϖ} . Notons $\mathcal{U} = \{(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\omega} \cup \text{Comp}(D_{\omega})}\}$ un germe de recouvrement adapté du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$. Alors :*

1. *Pour $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, tout élément $F \in \text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))})$ est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $\text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))})$.*
2. *Pour $i \in \Sigma_{\varpi}$, $i \in j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, on a :*
 - (a) *Tout élément $F \in \text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}) \cap \text{Aut}_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)})$ est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $\text{Fix}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)})$.*
 - (b) *Lorsque $i \in \Sigma_{\varpi}$ n'est pas une singularité de type noeud-col sc^{30} , tout élément $F \in \text{Aut}_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)})$ est holomorphiquement isotope à l'identité dans $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)})$.*

³⁰ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

Rappelons que le feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} étant de 2° espèce générale, la singularité $i \in \Sigma_{\varpi} \cap \text{Sing}(D_{\varpi})$, considérée dans l’assertion 1., ne peut être un noeud-col.

Fixons, dans la suite de ce paragraphe,

$$\mathcal{U} = \{(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\varpi} \cup \text{Comp}(D_{\varpi})}\},$$

un germe de recouvrement adapté (Cf. 0.2.1) du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$. Pour démontrer la proposition 3.1.4, nous aurons besoin des trois lemmes suivants :

Lemme 3.1.5 .

1. Soient $i \in \Sigma_{\varpi} \cap \text{Sing}(D_{\varpi})$, F un élément de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0 | (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \right)$ et $\pi : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i)) \rightarrow (D, \sigma_{\omega_0}(i))$ un germe de rétraction holomorphe de \mathcal{M}_{ω_0} sur l’une des deux branches du diviseur ; $D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$ et $\sigma_{\omega_0}(i) \in D$. Alors il existe un élément F_1 de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0 | (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \right)$ holomorphiquement fortement isotope à F dans $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0 | (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \right)$ qui préserve la fibration π , i.e. $\pi \circ F_1 = \pi$.
2. Soient $i \in \Sigma_{\varpi}$, $i \in j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, F un élément de $\text{Aut}_0 \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0 | (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$, et $\pi : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j) \rightarrow U_i \cap U_j$ un germe, le long de $U_i \cap U_j$, de rétraction holomorphe de \mathcal{M}_{ω_0} sur $U_i \cap U_j$. Alors il existe un élément F_1 de $\text{Aut}_0 \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0 | (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$ holomorphiquement fortement isotope à F dans $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0 | (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$ qui préserve la fibration π , i.e. $\pi \circ F_1 = \pi$.

Nous aurons besoin pour la démonstration de ce lemme de deux sous-lemmes :

Sous-lemme 3.1.6 Soit $\phi(x, y, t)$ le flot d’un champ de vecteurs à l’origine de \mathbb{C}^2 qui s’écrit

$$\mathcal{X} = x(1 + B(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + y(\lambda + A(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}$$

avec $A, B \in \mathcal{O}_2$, $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$. Considérons $C(x, y) \in \mathcal{O}_2$ et $f(x, y) = x(1 + yC(x, y))$. Alors il existe un germe de fonction holomorphe $T : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que

$$\begin{cases} f(\phi(x, y, T(x, y))) = x \\ T(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Preuve du sous-lemme 3.1.6. La fonction $K(x, y, t) = \frac{1}{x} f(\phi(x, y, t)) - 1$ est holomorphe à l’origine et l’on voit que

$$K(x, 0, t) = t(1 + B(x, 0)) \text{ modulo } (t^2). \mathcal{O}_3$$

Ainsi $\frac{\partial K}{\partial t}(x, 0, 0) = 1 + B(x, 0) \neq 0$ pour tout x proche de 0 et $K(x, 0, 0) = 0$. On conclut grâce au théorème des fonctions implicites. ■

Sous-lemme 3.1.7 Soit $\phi(x, y, t)$ le flot d’un champ de vecteur \mathcal{X} défini holomorphe au voisinage d’un ouvert $U \subset \{y = 0\}$ qui s’écrit :

$$\mathcal{X} = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + yB(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Section 3.1. : Digression nécessaire sur les germes d'automorphisme d'un germe de feuilletage

avec $A, B \in \mathcal{O}_2$ tel que $A(x, 0) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Considérons $f(x, y) = x + yC(x, y)$ un germe de fonction holomorphe au voisinage de U . Alors il existe un germe de fonction holomorphe $T : (\mathbb{C}^2, U) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que

$$\begin{cases} f(\phi(x, y, T(x, y))) = x \\ T(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Preuve du sous-lemme 3.1.7. La fonction $K(x, y, t) = f(\phi(x, y, t)) - x$ est holomorphe à l'origine et l'on voit que

$$K(x, 0, t) = tA(x, 0) \text{ modulo } (t^2) \cdot \mathcal{O}_3$$

Ainsi $\frac{\partial K}{\partial t}(x, 0, 0) = A(x, 0) \neq 0$ pour tout $x \in U$ et $K(x, 0, 0) = 0$. On conclut grâce au théorème des fonctions implicites. ■

Preuve du lemme 3.1.5. Notons $\phi(x, y, t)$ le flot de \mathcal{X} au temps t . D'après les deux sous-lemmes précédents, il existe une application holomorphe T telle que $\pi \circ F(\phi(x, y, T(x, y))) - \pi \equiv 0$. L'application $F_1(x, y) = F(\phi(x, y, T(x, y)))$ préserve ainsi la fibration π et, par construction, est holomorphiquement fortement isotope à F dans $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, \cdot})})$. ■

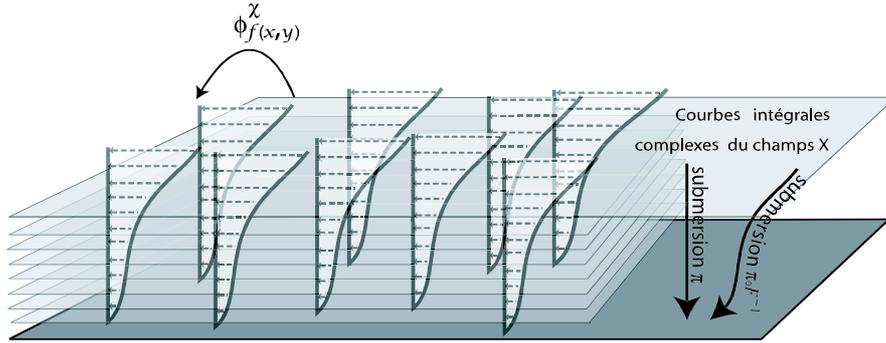


FIG. 7 – (Lemme 3.1.5) Représentation graphique de l'application $\phi_f^{\mathcal{X}}(x, y)$.

Lemme 3.1.8 Soient $i \in \Sigma_{\omega}$, $j \in Comp(D_{\omega})$, $i \in j$, et F un élément de $Aut_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j})})$. Fixons un germe de rétraction holomorphe $\pi : (\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j}) \rightarrow U_i \cap U_j$ et supposons que $\pi \circ F = \pi$, et que, pour tout $a \in U_i \cap U_j$, le germe en a de la restriction $F|_{\pi^{-1}(a)}$ est compatible, (Cf. 5.2.1), avec le germe de l'holonomie h_a de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, le long de $U_i \cap U_j$, représenté sur le germe de transversale $(\pi^{-1}(a), a)$. Alors F est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j})})$.

Preuve du lemme 3.1.8. Notons F_a la restriction de l'application F à la fibre $(\pi^{-1}(a), a)$, $a \in U_i \cap U_j$. D'après 5.2.2, il existe un entier relatif n_a tel que $F_a = h_a^{n_a}$. Lorsque h_a est périodique, n_a désignera l'entier minimal qui vérifie cette relation.

Fixons $a_0 \in U_i \cap U_j$ et un voisinage ouvert W de a_0 dans \mathcal{M}_{ω_0} tel que W est un flow-box du feuilletage et vérifie $W \cap D_{\omega_0} \subset U_i \cap U_j$. Considérons sur W

des coordonnées (z, w) telles que $\{z = cste\}$ sont les fibres de π et $\{w = cste\}$ sont les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|W}$. Comme F envoie feuille sur feuille, on a $F|_W(z, w) = (z, F_{a_0}(w))$. D'autre part, on voit facilement que $h_a(a, z) = (a, h_{a_0}(z))$, pour tout $a \in W \cap D_{\omega_0}$. Ainsi l'égalité $F_{a_0} = h_{a_0}^{n_{a_0}}$ induit les égalités $F_a = h_a^{n_{a_0}}$ pour tout $a \in W \cap D_{\omega_0}$. En d'autres termes $n_a = n_{a_0}$ pour $a \in W \cap D_{\omega_0}$. Ainsi, l'application $a \rightarrow n_a$ est localement constante. Elle est donc constante.

Permettons nous d'identifier $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)$ et $(\mathbb{C}^2, \mathcal{D}^* \times 0)$, où \mathcal{D}^* est le disque unité de \mathbb{C} épointé de l'origine. Notons n l'entier relatif qui vérifie $F_a = h_a^n$, $a \in \mathcal{D}^*$. Considérons \mathcal{X}_0 le champ de vecteurs sur $(\mathbb{C} \times 0, \mathcal{D}^* \times 0)$ défini par $\mathcal{X}_0(x) = 2i\pi n x \frac{\partial}{\partial x}$. Considérons l'unique champ $\mathcal{Z}(x, y)$ obtenu en relevant le champ \mathcal{X}_0 , sur les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, à l'aide de la submersion π . Fixons (x, y) un système de coordonnées holomorphes sur $(\mathbb{C}^2, \mathcal{D}^* \times 0)$ tel que $\{y = 0\}$ est la variété \mathcal{D}^* .

- Lorsque la singularité $\sigma_{\omega_0}(i)$ n'est pas de type noeud-col, le germe de 1-forme définissant le feuilletage en ce point est du type $y(\lambda_1 + A(x, y))dx + x(\lambda_2 + B(x, y))dy$, $A, B \in \mathcal{O}_2$, avec $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$. Le champ \mathcal{Z} s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(x, y) = 2i\pi n x \frac{\partial}{\partial x} - 2i\pi n y \frac{\lambda_2 + B(x, y)}{\lambda_1 + A(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Lorsque la singularité $\sigma_{\omega_0}(i)$ est de type noeud-col, le germe de 1-forme définissant le feuilletage en ce point est du type $(\alpha(x) + yA_1(x, y))dy + y^{n+1}dx$, avec $A_1 \in \mathcal{O}_2$, $\alpha \in \mathcal{O}_1$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$ (Cf. [Dul]). Le champ \mathcal{Z} s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(x, y) = 2i\pi n x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2i\pi n x y^{n+1}}{\alpha(x) + yA_1(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Remarquons que dans ce cas $\mathcal{Z}(x, y)$ n'est pas holomorphe à l'origine mais seulement sur un voisinage de $\mathcal{D}^* \times 0$ dans \mathbb{C}^2 .

Notons $\phi_1^{\mathcal{Z}}$ le flot au temps 1 du champ \mathcal{Z} . Les applications $\phi_1^{\mathcal{Z}}$ et F coïncident sur $(\mathbb{C}^2, \mathcal{D}^* \times 0)$, en effet pour tout $a \in (\mathbb{C} \times 0, \mathcal{D}^* \times 0)$, distinct de l'origine, nous avons $\phi_1^{\mathcal{Z}}|_{\pi^{-1}(a)} = F_a = h_a^n$. Il s'ensuit l'égalité des germes $F = \phi_1^{\mathcal{Z}}$ sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. L'isotopie cherchée n'est autre que le germe holomorphe $(x, y, t) \mapsto \phi_t^{\mathcal{Z}}(x, y)$. ■

Lemme 3.1.9 *Soient $i \in \Sigma_{\varpi} \cap \text{Sing}(D_{\varpi})$, $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, $i \in j$, et F élément de $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$. Nous supposons que F admet un représentant holomorphe le long de $V = U_i \cap \Lambda_{\omega_0}(j) \subset D_{\omega_0}$. Fixons un germe, le long de V , de rétraction holomorphe $\pi : (\mathcal{M}_{\omega_0}, V) \rightarrow V$, tel que $\pi^{-1}(\sigma_{\omega_0}(i)) \in \text{Comp}(D_{\varpi})$ soit la seconde composante irréductible du diviseur passant par $\sigma_{\omega_0}(i)$. Supposons, de plus, que $\pi \circ F = \pi$ et que, pour tout $a \in V^* = V - \sigma_{\omega_0}(i)$, $F|_{\pi^{-1}(a)}$ est compatible (Cf. 5.2.1) avec le germe de difféomorphisme d'holonomie h_a de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, le long de V^* , représenté sur le germe de transversale $(\pi^{-1}(a), a)$. Alors F est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$.*

Preuve du lemme 3.1.9. Utilisons la même méthode que celle effectuée dans la preuve du lemme 3.1.8. Celle-ci montre l'existence d'un entier relatif n tel que $F_a = h_a^n$, pour tout $a \in V$. De plus, maintenant, la singularité $\sigma_{\omega_0}(i)$

Section 3.1. : Digression nécessaire sur les germes d'automorphisme d'un germe de feuilletage

n'est pas un noeud col, car ω_0 est de 2^o espèce générale. On obtient ainsi, sur un voisinage de V dans \mathcal{M}_{ω_0} , que nous identifions à un polydisque standard $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$, le champ de vecteurs holomorphes

$$\mathcal{Z}(x, y) = 2i\pi nx \frac{\partial}{\partial x} - 2i\pi ny \frac{\lambda_2 + B(x, y)}{\lambda_1 + A(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}$$

qui est tangent au feuilletage³¹ et qui se projette par π sur le champ $2i\pi nx \frac{\partial}{\partial x}$. L'isotopie cherchée est encore donnée par le flot $\phi_t^{\mathcal{Z}}$ de \mathcal{Z} . ■

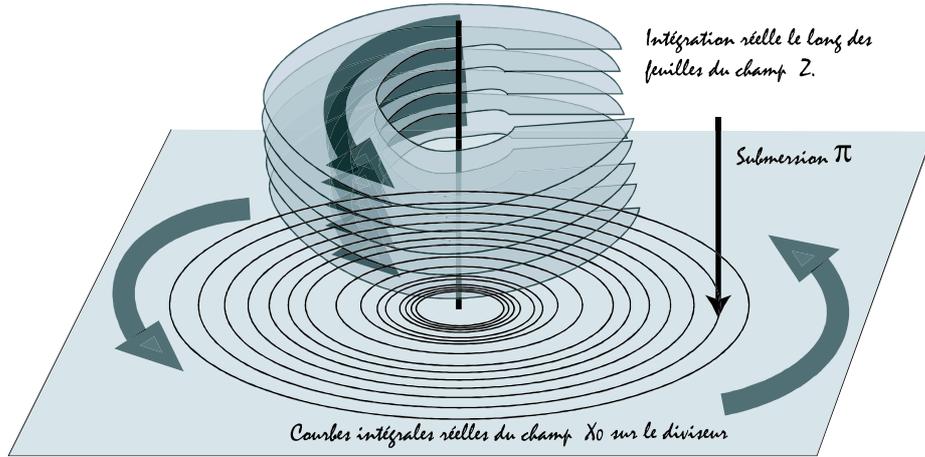


FIG. 8 – (Lemme 3.1.8 et lemme 3.1.9) Représentation de l'isotopie $\phi_t^{\mathcal{Z}}$.

Lemme 3.1.10 Soient $i \in \Sigma_{\omega}$, $j \in \text{Comp}(D_{\omega})$, $i \in j$. Fixons $a \in U_i \cap U_j$, identifions $(\pi^{-1}(a), a)$ à $(\mathbb{C}, 0)$ et supposons que le germe de difféomorphisme d'holonomie h_a est linéarisable. Considérons un élément f du centralisateur de h_a , alors f est holomorphiquement isotope à l'identité dans $\text{Cen}(h_a)$: Il existe un germe d'application holomorphe $\phi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1]) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $(y, s) \mapsto \phi_s(y)$ tel que $\phi_1 = \text{id}$, $\phi_0 = f$ et $\phi_s \in \text{Cen}(h_a)$ pour tout $s \in (\mathbb{C}, [0, 1])$.

Preuve du lemme 3.1.10. Nous pouvons supposer que pour le système de coordonnées (x, y) choisi sur $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)$, l'application h_a est linéaire : $h_a(y) = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Trois cas dépendant de α se présentent :

1. Le cas $\alpha = 1$ est trivial car h_a est l'identité et $\text{Cen}(h_a) = \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.
2. Le cas $\alpha \in \mathbb{C}^*$, non racine de l'unité.

En identifiant les coefficients du développement en série entière de l'égalité $g \circ h_a = h_a \circ g$, on démontre que

$$\text{Cen}(h_a) = \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \text{ t.q. } g(y) = \beta y, \beta \in \mathbb{C}^*\}$$

Ainsi il existe $\gamma \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(y) = \gamma y$. Une isotopie est alors $\phi_s(y) = \gamma_s y$ où $s \mapsto \gamma_s$ est un chemin de \mathbb{C}^* reliant γ à 1.

³¹Nous utilisons les notations de la preuve du lemme 3.1.8, dans laquelle le germe de 1-forme définissant le feuilletage au point singulier est du type $y(\lambda_1 + A(x, y))dx + x(\lambda_2 + B(x, y))dy$, avec $A, B \in \mathcal{O}_2$, $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$.

3. Le cas $\alpha \in \mathbb{C}^*$ où $\alpha = \exp(2i\pi\frac{p}{q})$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

On voit alors que les éléments du centralisateur sont les

$$g(y) = y \left(\beta + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \gamma_k (y^q)^k \right), \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma_k \in \mathbb{C}.$$

Une isotopie est alors $\phi_s(y) = y(\beta_s + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (1-s)\gamma_k (y^q)^k)$ où $s \mapsto \beta_s$ est un chemin de \mathbb{C}^* reliant β à 1.

Voilà. ■

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration de l'existence des isotopies :

Preuve de la proposition 3.1.4. Cette démonstration se scinde naturellement en deux parties :

1. **Pour** $i \in \Sigma_{\varpi}$, $i \in j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$:

Fixons un élément F de $\text{Aut}_0 \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$.

D'après le lemme 3.1.5, il existe un élément G de $\text{Aut}_0 \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$ holomorphiquement fortement isotope à F dans $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$ qui préserve la fibration π ; $\pi \circ G = \pi$.

Trois cas (éventuellement non disjoints) se présentent :

– Premier cas : F est un élément de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$.

L'application G est donc, elle aussi, un élément de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$. Ainsi pour chaque $a \in U_i \cap U_j$, le germe d'application $G|_{\pi^{-1}(a)}$ est compatible³² avec le germe d'holonomie h_a . En effet, fixons $a \in U_i \cap U_j$ et considérons U et V deux voisinage de a dans $\pi^{-1}(a)$ tels que $h_a(V) \subset U$ et $G|_{\pi^{-1}(a)}(V) \subset U$ et notons z un point de V . L'application G étant un élément de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$, il existe W un ouvert de \mathcal{M}_{ω_0} égal à U sur $\pi^{-1}(a)$ tel que si z et $G(z)$ appartiennent à W alors z et $G(z)$ sont contenus dans une même feuille du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|W}$. Ainsi, l'image par $G|_{\pi^{-1}(a)}$ du point z est dans la U -orbite de h_a du point z , $O_U^{h_a}(z)$: le germe d'application $G|_{\pi^{-1}(a)}$ est compatible avec le germe d'application h_a . D'après le lemme 3.1.8, G est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$.

– Deuxième cas : F est un élément de $\text{Aut}_0 \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$, h_a est non linéarisable, $a \in U_i \cap U_j$.

Dans ce cadre, h_a est soit l'holonomie d'une singularité résonnante non linéarisable soit l'holonomie de la variété forte d'une singularité de type noeud-col snc³³. L'application $G|_{\pi^{-1}(a)}$ appartient au centralisateur de h_a ; elle induit un automorphisme sur le chapelet de sphères associé à la classe analytique du germe de difféomorphisme h_a . Le feuilletage \mathcal{F}_{ϖ} étant de 2°

³²Cf. définition 5.2.1.

³³Cf. 0.2.1 Singularités réduites

espèce générale, cet automorphisme est l'identité, ainsi le germe d'application $G|_{\pi^{-1}(a)}$ est compatible avec le germe d'application h_a , pour tout $a \in U_i \cap U_j$. D'après le lemme 3.1.8, G est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$.

- Troisième cas : F est un élément de $Aut_0\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$, h_a est linéarisable, $a \in U_i \cap U_j$.

Fixons $a \in U_i \cap U_j$, nous disposons d'une isotopie de $G|_{\pi^{-1}(a)}$ dans le centralisateur de h_a d'après le lemme 3.1.10. Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}$ étant régulier, cette isotopie s'étend classiquement en un unique germe le long de $(U_i \cap U_j) \times [0, 1]$ d'isotopie holomorphe reliant G à l'identité dans $Aut\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$.

2. Pour $i \in \Sigma_{\varpi} \cap Sing(D_{\varpi})$:

Fixons un élément F de $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$ et donnons nous un germe de rétraction holomorphe π de $(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))$ sur l'une (des deux) composantes locales D de D_{ω_0} en $\sigma_{\omega_0}(i)$.

D'après le lemme 3.1.5, il existe un élément G de $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$ holomorphiquement fortement isotope à F dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$ qui préserve la fibration π ; $\pi \circ G = \pi$. Ainsi, pour un petit voisinage ouvert (1-connexe) U de $\sigma_{\omega_0}(i)$ dans \mathcal{M}_{ω_0} , $G_U|_{\pi^{-1}(a)}$ est compatible³⁴ avec le germe de difféomorphisme d'holonomie h_a , $a \in D \cap U - \{\sigma_{\omega_0}(i)\}$, G_U désignant un représentant de G sur U . D'après le lemme 3.1.9, G est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$.

Ce qui achève cette démonstration ■

3.2 Quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$.

La notion de quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$ est essentielle à ce chapitre.

Dans ce qui suit, nous construisons des extensions locales de φ "adaptées" au recouvrement \mathcal{U} . Ensuite, nous associons à tout système \wp de telles extensions, un objet de type cohomologique $\partial(\wp)$ qui contient l'information sur les obstructions aux recollements des éléments de \wp . L'élément $\partial(\wp)$ sera appelé quasi-cocycle. Nous verrons qu'on peut construire \wp de sorte que $\partial(\wp)$ possède de bonnes propriétés d'isotopie relative aux feuilletages (on dira que $\partial(\wp)$ est de quintessence).

3.2.1 Définitions de quasi-cocycles du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$.

Considérons deux germes de feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$, $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$, singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} . Supposons qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible³⁵ aux marquages. Notons

$$\mathcal{U} = \{(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\varpi} \cup Comp(D_{\varpi})}\},$$

³⁴ Cf. Définition 5.2.1

³⁵ Cf. § 1.2.2.

un germe de recouvrement adapté (Cf. 0.2.1) du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$. Fixons, de manière arbitraire, une relation d'ordre sur les composantes de D_{ϖ} , notée \prec . Considérons le germe de recouvrement adapté

$$\mathcal{U}' = \{(\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_i)_{i \in \Sigma_{\varpi} \cup \text{Comp}(D_{\varpi})}\},$$

du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1})$, tel que pour tout $i \in \Sigma_{\varpi} \cup \text{Comp}(D_{\varpi})$, on a égalité des ouverts $\varphi(U_i) = U'_i$.

Notons $\Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi}) = \{(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi}) \text{ tels que } i \in j\} \subset \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi})$. Nous appelons *collection d'extensions locales adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U}* toute collection

$$\wp = \left((f_{(ij)})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})}, (f_j)_{j \in \text{Comp}(D_{\varpi})} \right)$$

telle que :

1. $f_{(ij)} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \tilde{U}_i^j)$ est un germe de biholomorphisme qui vérifie $f_{(ij)}(U_i) = \tilde{U}_i^j$, conjugue les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \tilde{U}_i^j)}$ et qui est une extension de la restriction de φ à l'ouvert $U_i \cap \Lambda_{\omega_0}(j)$, de manière précise : $\varphi|_{U_i \cap \Lambda_{\omega_0}(j)} = f_{(ij)}|_{U_i \cap \Lambda_{\omega_0}(j)}$, avec $(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})$. L'ouvert \tilde{U}_i^j est l'image par $f_{(ij)}$ de l'ouvert U_i , il n'est pas en général égal à U'_i , on a seulement $\tilde{U}_i^j \cap \Lambda_{\omega_1}(j) = U'_i \cap \Lambda_{\omega_1}(j)$.
2. $f_j : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_j) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_j)$ est un germe de biholomorphisme qui vérifie $f_j(U_j) = U'_j$, est une extension locale de $\varphi : \varphi|_{U_j} = f_j|_{U_j}$, et qui conjugue les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_j)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_j)}$.

Remarquons que si $i_0 \in \Sigma_{\varpi}$ est situé sur la partie lisse du diviseur, alors la famille \wp contient un seul élément $f_{(i_0 j)}$ où figure l'indice i_0 . Par contre si $i_0 \in \Sigma_{\varpi} \cap \text{Sing}(D_{\varpi})$ alors la famille \wp contient deux éléments $f_{(i_0 j_1)}$ et $f_{(i_0 j_2)}$ où figure cet indice, et j_1, j_2 sont les deux composantes connexes de D_{ω_0} qui s'intersectent en i_0 .

Considérons l'espace $\tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$ suivant

$$\tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U}) = \prod_{i \in \text{Sing}(D_{\varpi})} \text{Aut} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \right) \times \prod_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})} \text{Aut}_0 \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)} \right)$$

Nous appellerons les éléments de $\tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$ des *quasi-cocycles du couple* $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$. Remarquons que cette notion dépend du marquage de \mathcal{F}_{ω_0} par \mathcal{F}_{ϖ} . De même, nous appellerons *quasi-cocycles* associés à une collection \wp , d'extensions locales adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U} , le quasi-cocycle $\partial(\wp) \in \tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$ suivant :

$$\partial(\wp) = \left((\phi_i)_{i \in \text{Sing}(D_{\varpi})}, (\phi_{ij})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})} \right),$$

avec :

- $\phi_i = f_{(ij)}^{-1} \circ f_{(ik)}$ où $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, $j, k \in \text{Comp}(D_{\varpi})$ et $i = j \cap k$, $j \prec k$.
- $\phi_{ij} = f_j^{-1} \circ f_{(ij)}$ où $(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})$.

Définition 3.2.1 Nous dirons qu'un quasi-cocycle $((\phi_i), (\phi_{ij})) \in \tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$ est de quintessence si :

1. pour $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, le germe d'automorphisme

$$\phi_i : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i)) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))$$

est un élément de $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$ et

2. pour $i \in \Sigma_{\varpi}$ et $i \notin \text{Sing}(D_{\varpi})$ tel que le germe de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ est de type noeud-col avec séparatrices convergentes en i , le germe d'automorphisme

$$\phi_{ij} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j), i, j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$$

est un élément de $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$, où j est l'unique composante irréductible du diviseur portant la singularité i .

Remarquons que lorsque le feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} est de 2^o espèce générale, tout quasi-cocycle de quintessence $\left((\phi_i)_{i \in \text{Sing}(D_{\varpi})}, (\phi_{ij})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi})}\right)$ vérifie, d'après la proposition 3.1.4 :

1. Pour tout $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, ϕ_i est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$.
2. Pour tout $(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi})$, ϕ_{ij} est holomorphiquement isotope à l'identité dans $\text{Aut}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$.

3.2.2 Existence d'un quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$.

Proposition 3.2.2 *Considérons deux germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , de 2^o espèce générale, SL -équivalents et supposons qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible³⁶ aux marquages. Notons $\mathcal{U} = (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\omega} \cup \text{Comp}(D_{\omega})}$ un germe de recouvrement adapté du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$.*

Alors, il existe une collection d'extensions locales \wp adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U} telle que le quasi-cocycle associé, $\partial(\wp)$, est de quintessence.

Nous aurons besoin, pour démontrer cette proposition, des trois résultats suivants :

Lemme 3.2.3 *Soit \mathcal{F}_{ω} un germe de feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$ possédant une singularité réduite, à l'origine. Supposons, de plus que l'axe des x est une variété invariante et dans le cas noeud-col, la variété forte. Soit g un germe de biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$. Alors il existe un élément G de $\text{Fix}(\mathcal{F}_{\omega})$ tel que :*

1. G est holomorphiquement fortement isotope³⁷ à l'identité dans $\text{Fix}(\mathcal{F}_{\omega})$,
2. On a égalité : $G|_{(0 \times \mathbb{C}, 0)} = g$.

³⁶ Cf. § 1.2.2.

³⁷ Cf. §3.1.

Preuve. Il existe une application holomorphe

$$\begin{aligned} \tilde{g} : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1]) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1]), \\ (x, s) &\mapsto \tilde{g}(x, s) = (g_s(x), s) \end{aligned}$$

telle que :

1. pour tout $s \in (\mathbb{C}, [0, 1])$, on a $g_s(0) = 0$ et $g'_s(0) \neq 0$.
2. On a égalité $g_0 = id$ et $g_1 = g$.

Le champ de vecteurs $X(x, s) = \frac{\partial g_s}{\partial s} \circ g_s^{-1}$ sur $(\mathbb{C}, 0)$, dépendant du temps, dont \tilde{g} est le flot s'annule en 0 : $X(x, s) = x.a(x, s) \frac{\partial}{\partial x}$. Deux cas se présentent :

– La singularité réduite n'est pas de type noeud-col.

Quitte à choisir les coordonnées, \mathcal{F}_ω est donné par le germe de 1-forme ω qui s'écrit : $\omega = x(\lambda_1 + A(x, y))dy + y(\lambda_2 + B(x, y))dx$. Le champ $X(x, s)$ s'étend, alors, sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ en un champ holomorphe Z tangent au feuilletage en posant :

$$Z(x, y, s) = x.a(x, s) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\lambda_2 + B(x, y)}{\lambda_1 + A(x, y)} a(x, s) \frac{\partial}{\partial y}.$$

On remarque que le champ Z se projette, par la projection $\pi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $(x, y) \rightarrow x$, sur le champ $X(x, s)$, ainsi le flot

$$\begin{aligned} \tilde{G} : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1]) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, 0), \\ (x, y, s) &\mapsto \tilde{G}(x, y, s) = G_s(x, y) \end{aligned}$$

de Z laisse la fibration π , où $\pi(x, y) = x$, globalement invariante. Le difféomorphisme G_1 convient.

– La singularité réduite est de type noeud-col.

Choisissons encore des coordonnées dans lesquelles la 1-forme $\omega = (x(\alpha(x) + \beta(y)) + xyA_1(x, y))dy + y^{p+1}dx$ caractérise le feuilletage \mathcal{F}_ω à l'origine.

L'application $\alpha(x)$ étant une unité, les idéaux (y, x) et $(y, x(\alpha(x) + \beta(y)) + xyA_1(x, y))$ de $\mathbb{C}\{x, y, s\}$ sont égaux.

Comme $x.a(x, s)$ appartient à l'idéal (y, x) de $\mathbb{C}\{x, y, s\}$, il existe $U_1, V_1 \in \mathbb{C}\{x, y, s\}$ tels que

$$x.a(x, s) = -yU_1(x, y, s) - V_1(x, y, s)(x(\alpha(x) + \beta(y)) + xyA_1(x, y)).$$

Ainsi le champ

$$Z(x, y, s) = (xa(x, s) + yU_1(x, y, s)) \frac{\partial}{\partial x} + y^{p+1}V_1(x, y, s) \frac{\partial}{\partial y}$$

est un champ tangent au feuilletage \mathcal{F}_ω (en effet $\omega(Z) \equiv 0$) et a fortiori à l'axe des x . Sa restriction à cet axe vaut $X(x, s)$. Son flot :

$$\begin{aligned} \tilde{G} : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1]) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, 0), \\ (x, y, s) &\mapsto \tilde{G}(x, y, s) = G_s(x, y) \end{aligned}$$

est une extension du flot de X , c.à.d. g_s . Le difféomorphisme G_1 convient.

Voilà. ■

Avant de commencer la preuve de la proposition 3.2.2, nous rappelons deux résultats d'existence de conjugaison entre feuilletages réduits. Ils nous seront utiles dans la démonstration qui suit. La démonstration du premier résultat se trouve dans [Mat₃] et dans [Mat-Mou], et celle du second dans [Mez₂] (c'est le théorème 2.2.1 de la page 53).

Théorème 3.2.4 (Mattei-Moussu) : Soient \mathcal{F}_ω et $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$ deux germes de feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ possédant une singularité réduite à l'origine de type selle. Notons $\varphi : (\mathbb{C} \times 0, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times 0, 0)$ un germe de biholomorphisme, notons (Σ, m) , resp. $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ où $\tilde{m} = \varphi(m)$, un germe de transversale, de type $(m \times \mathbb{C}, m)$, au feuilletage \mathcal{F}_ω , resp. $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$ et h , resp. \tilde{h} , le germe de difféomorphisme d'holonomie de la feuille $(\mathbb{C} \times 0, 0)$ du feuilletage \mathcal{F}_ω , resp. $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$, calculé sur la transversale (Σ, m) , resp. $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$. S'il existe un germe de biholomorphisme $\Phi_1 : (\Sigma, m) \rightarrow (\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ qui conjugue les germes d'holonomie, $\Phi_1 \circ h = \tilde{h} \circ \Phi_1$, alors il existe un unique germe de biholomorphisme $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ qui s'écrit $\Phi(x, y) = (\varphi(x), \tilde{\Phi}_1(x, y))$, qui conjugue les feuilletages \mathcal{F}_ω et $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$ et qui vérifie l'égalité : $\Phi|_{(\Sigma, m)} = \Phi_1$.

Théorème 3.2.5 (Berthier-Meziani-Sad) Soient $\Omega_j = x(1 + A_j(x, y))dy - yB_j(x, y)dx$, $j = 1, 2$, deux 1-formes holomorphes singulières de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de type noeud-col sc³⁸. Désignons par $h_j \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le difféomorphisme d'holonomie de \mathcal{F}_{Ω_j} le long de la séparatrice forte $\{y = 0\}$ calculée sur une certaine transversale $\Sigma_j = \{x = x_j\}$. Supposons qu'il existe un élément $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $\phi^*h_2 = h_1$. Alors il existe $\Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, fibrée en $x \in \mathbb{C}$, tel que $\Phi^*\Omega_2 \wedge \Omega_1 \equiv 0$ et $\Phi|_{\Sigma_1} = \phi$.

Preuve de la proposition 3.2.2. Construisons les biholomorphismes $f_{(ij)}$ et f_j , en distinguant les différents cas :

1. **Construction du biholomorphisme f_j , $j \in \text{Comp}(D_\omega)$:**

Fixons $j \in \text{Comp}(D_\omega)$ et notons I_j l'ensemble $j \cap \Sigma_\omega$. Considérons deux systèmes³⁹ complets simples de lacets $((\gamma_l)_{l \in I_j}, p)$, resp. $((\mu_l)_{l \in I_j}, q)$, représentant de la classe $[\Gamma_{\omega_0, \Lambda_{\omega_0}(j)}]$, resp. $[\Gamma_{\omega_1, \Lambda_{\omega_1}(j)}]$, qui vérifient $\varphi(p) = q$. Notons $\rho_0 : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_j) \rightarrow U_j$, resp. $\rho_1 : (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_j) \rightarrow U'_j$, un germe de rétraction holomorphe. Le groupe d'holonomie calculé sur la transversale $\rho_0^{-1}(p)$, resp. $\rho_1^{-1}(q)$, est engendré par les germes de difféomorphismes d'holonomie (h_{ω_0, γ_l}) , resp. (h_{ω_1, μ_l}) , associés aux lacets γ_l , resp. μ_l , donnés par les marquages, où $l \in I_j$. Les germes de feuilletages marqués

$$(\mathcal{F}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}, [\Gamma_{\omega_0, D}]) \text{ et } (\mathcal{F}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}, [\Gamma_{\omega_1, D}])$$

étant SL-équivalents, il existe un germe de biholomorphisme

$$\phi : (\rho_0^{-1}(p), p) \rightarrow (\rho_1^{-1}(q), q)$$

³⁸ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

³⁹ Cf. § 1.2.

qui conjugue les générateurs de l'holonomie : $\phi \circ h_{\omega_0, \gamma_l} = h_{\omega_1, \mu_l} \circ \phi$ pour tout $l \in I_j$.

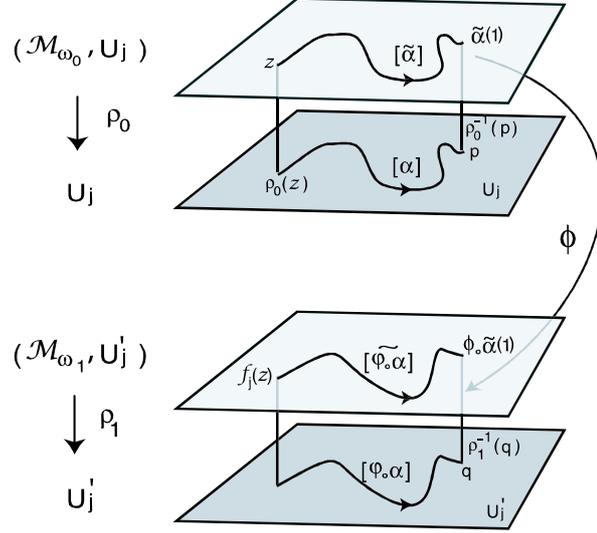


FIG. 9 – (Preuve du lemme 3.2.2) Méthode de relevé des chemins

Une application $f_j : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_j) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_j)$, qui réalise les propriétés voulues, se construit classiquement par la méthode de relevé des chemins :

Notons W un voisinage ouvert de U_j dans \mathcal{M}_{ω_0} . On considère un point z de W et un chemin holomorphe α plongé dans U_j reliant $\rho_0(z)$ et p tel que $\alpha(0) = \rho_0(z)$. Il existe un unique chemin $\tilde{\alpha}$, resp. $(\tilde{\varphi} \circ \alpha)$, proche de α , resp. $\varphi \circ \alpha$, localement contenu dans les plaques du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, resp. $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$, tel que $\rho_0 \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ et $\tilde{\alpha}(0) = z$, resp. $\rho_1 \circ (\tilde{\varphi} \circ \alpha) = \varphi \circ \alpha$ et $(\tilde{\varphi} \circ \alpha)(1) = \phi \circ \tilde{\alpha}(1)$. L'image par f_j du point z est alors $(\tilde{\varphi} \circ \alpha)(0)$. L'application f_j implique, par germification, le germe f_j . Ainsi construite l'application f_j est bien définie holomorphe, ne dépend pas des choix des lacets et est unique.

2. Construction du biholomorphisme $f_{(ij)}$, $(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} \text{Comp}(D_{\varpi})$, $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$:

Fixons $(i, j) \in \text{Sing}(D_{\varpi}) \times \text{Comp}(D_{\varpi})$ tel que $i \in j$. Les germes de feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\omega_0}^M$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^M$ étant SL-équivalents, il existe un germe de biholomorphisme

$$G_i : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i)) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(i))$$

qui conjugue les feuilletages et vérifie l'égalité des germes :

$$G_i(\Lambda_{\omega_0}(j), \sigma_{\omega_0}(i)) = (\Lambda_{\omega_1}(j), \sigma_{\omega_1}(i)).$$

Notons

$$g_i : (\Lambda_{\omega_0}(j), \sigma_{\omega_0}(i)) \rightarrow (\Lambda_{\omega_1}(j), \sigma_{\omega_1}(i))$$

la restriction au germe de variété $(\Lambda_{\omega_0}(j), \sigma_{\omega_0}(i))$ du biholomorphisme G_i . Appliquons le lemme 3.2.3 à $g = g_i^{-1} \circ \varphi$, il existe ainsi un élément, F , de $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$, holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$ tel que $F|_{(\Lambda_{\omega_0}(j), \sigma_{\omega_0}(i))} = g_i^{-1} \circ \varphi$.

Posons :

$$f_{(ij)} = G_i \circ F : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_i),$$

c'est un germe de biholomorphisme qui est aussi une extension locale de la restriction de φ à $\Lambda_{\omega_0}(j) \cap U_i$.

De plus, fixons $(i, j, k) \in \Sigma_{\varpi} \times Comp(D_{\varpi}) \times Comp(D_{\varpi})$ tels que $j \cap k = i$.

Remarque Clé 3.2.6 Soit $(i, j, k) \in \Sigma_{\varpi} \times Comp(D_{\varpi}) \times Comp(D_{\varpi})$ tels que $j \cap k = i$. Les applications $f_{(ij)}$ et $f_{(ik)}$ sont toutes deux de type suivant $f_{(ij)} = G_i \circ F$ et $f_{(ik)} = G_i \circ H$ avec F et H holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$. Ainsi $f_{(ik)}^{-1} \circ f_{(ij)} = F^{-1} \circ H$ est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right)$.

3. Construction du biholomorphisme $f_{(ij)}$, $(i, j) \in \Sigma_{\varpi} \check{\times} Comp(D_{\varpi})$, $i \in \Sigma_{\varpi} - Sing(D_{\varpi})$.

Fixons $i \in \Sigma_{\varpi} - Sing(D_{\varpi})$, notons j la composante irréductible de D_{ϖ} contenant i . Considérons l'application $f_j : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_j) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_j)$ construite dans la partie 1 de cette démonstration.

Deux cas se présentent :

- La singularité $\sigma_{\omega_0}(i)$ n'est ni de type noeud, ni de type noeud-col snc, Cf. 0.2.1 Singularités réduites (éventuellement cette singularité peut-être de type noeud col avec ses deux séparatrices convergentes).

Notons $\rho : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow U_i$, resp. $\rho' : (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_i) \rightarrow U'_i$, un germe de rétraction holomorphe tel que $\rho^{-1}(\sigma_{\omega_0}(i))$, resp. $\rho'^{-1}(\sigma_{\omega_1}(i))$, est la séparatrice de $\sigma_{\omega_0}(i)$, resp. $\sigma_{\omega_1}(i)$, du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, resp. $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$. Fixons un point x de $U_i \cap U_j$. Notons Σ la fibre $\rho^{-1}(x)$ et Σ' la fibre $\rho'^{-1}(\varphi(x))$. Considérons $\phi_j : (\Sigma, x) \rightarrow (f_j(\Sigma), \varphi(x))$ la restriction de f_j à la transversale Σ et $\psi_j : (f_j(\Sigma), \varphi(x)) \rightarrow (\Sigma', \varphi(x))$ l'application de transport holonome le long des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$ qui identifie ces transversales.

En appliquant le lemme d'extension de Meziani 3.2.5 ou celui de Mattei-Moussu 3.2.4 à l'application $\psi_j \circ \phi_j$, on obtient une application $f_{(ij)} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_i)$ qui vaut φ en restriction à U_i , vaut $\psi_j \circ \phi_j : (\Sigma, x) \rightarrow (\Sigma', \varphi(x))$ en restriction à (Σ, x) et conjugue les germes de feuilletages $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}, U_i)$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}, U'_i)$. Trivialement, $f_j^{-1} \circ f_{(ij)}$ conjugue le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}$ à lui-même. De plus, l'application $f_j^{-1} \circ \psi_j^{-1} \circ f_{(ij)|(\Sigma, x)}$ est l'identité de la transversale (Σ, x) . Ainsi toute feuille L qui coupe (Σ, x) est sa propre image par $f_j^{-1} \circ f_{(ij)}$. En d'autres termes, l'automorphisme $f_j^{-1} \circ f_{(ij)}$ est un élément de $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$. De plus, $f_j^{-1} \circ f_{(ij)}$ est aussi un élément de $Aut_0\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$, puisque f_j et $f_{(ij)}$ valent tous deux φ en restriction à $U_i \cap U_j$.

- La singularité $\sigma_{\omega_0}(i)$ est de type noeud ou de type noeud-col snc, Cf. 0.2.1 Singularités réduites.

Nous utilisons la même méthode de construction pour l'application $f_{(ij)}$ que celle utilisée dans la partie 2 de cette démonstration.. Elle nous permet d'obtenir l'application $f_{(ij)} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, U'_i)$ qui conjugue les germes de feuilletages $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}, U_i)$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}, U'_i)$ et qui vaut φ en restriction à U_i . Ainsi $f_{(ij)}^{-1} \circ f_j$ appartient à $Aut_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)})$.

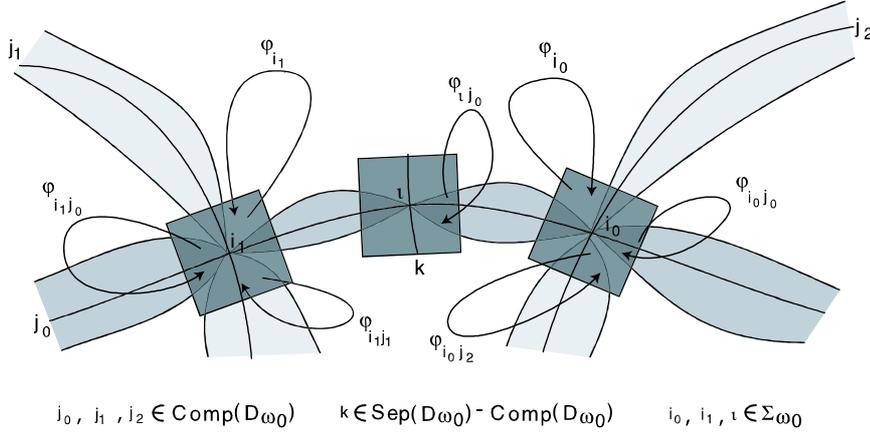


FIG. 10 – Preuve de la proposition 3.2.2 : Extensions locales associées.

En conclusion :

Nous avons construit une collection d'extensions locales adaptées à φ et au recouvrement \mathcal{U} ,

$$\varphi = \left((f_{(ij)})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi})}, (f_j)_{j \in \text{Comp}(D_{\varpi})} \right).$$

Ces extensions vérifient, par construction :

- (a) pour tout $i \in \text{Sing}(D_{\varpi})$, l'élément $f_{(ik)}^{-1} \circ f_{(ij)}$ de $Aut(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))})$ est holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans

$$\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))}\right),$$

avec $i \in k, j \in \text{Comp}(D_{\varpi}), k \neq j$,

- (b) pour chaque $i \in \Sigma_{\varpi} - \text{Sing}(D_{\varpi})$ qui n'est ni une singularité de type noeud, ni une singularité de type noeud-col snc⁴⁰, le germe d'automorphisme $f_{(ij)}^{-1} \circ f_j$ est un élément du groupe $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$ avec $j \in \text{Comp}(D_{\omega_0}), j \ni i$.

Ainsi le quasi-cocycle $\partial(\varphi)$ associé à φ est un quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$. ■

⁴⁰Cf. 0.2.1 Singularités réduites

Remarque 3.2.7 *Le système \wp que nous avons construit vérifie aussi la propriété suivante :*

- pour chaque $i \in \Sigma_{\varpi} - \text{Sing}(D_{\varpi})$ qui n'est ni une singularité de type noeud, ni une singularité de type noeud-col *snc*⁴¹, le germe d'automorphisme

$$\phi_{i,j} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)$$

est un élément du groupe $\text{Fix}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i \cap U_j)}\right)$ avec $j \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, $j \ni i$.

Nous n'aurons pas besoin pour ce qui nous intéresse de cette propriété mais elle peut être utile, dans des cas précis, pour obtenir des déploiements.

3.3 Construction de la faible SL-reliabilité des feuilletages

$\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$.

Nous construisons, dans cette section, un germe de déformation SL-équisingulier permettant de faiblement SL-relier les feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$. Cette construction se fera en déformant l'espace à l'aide des cocycles $\partial(\wp)$ et, plus précisément, à l'aide des isotopies $(\Phi_{i,j})_s$ reliant les éléments de $\partial(\wp)$ à l'identité. Le nouvel espace $\mathcal{M} = \sqcup(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, U_j \times [0, 1]) / (\Phi_{i,j})_s$ ainsi obtenu, est visiblement fibré au-dessus de $(\mathbb{C}, [0, 1])$ et les fibres en 0 et en 1 sont clairement biholomorphes à \mathcal{M}_{ω_0} et \mathcal{M}_{ω_1} . Cet espace sera muni d'un feuilletage holomorphe de dimension 1, vertical au-dessus de l'espace des paramètres. Il restera à prouver alors que cet espace est biholomorphe à la cime d'un arbre de résolution. En d'autres termes, nous allons voir que le diviseur contenu dans \mathcal{M} est exceptionnel et que l'on obtient un voisinage de $0 \times [0, 1]$ dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ en "le contractant au-dessus de \mathbb{C} ".

Nous nous plaçons dans les hypothèses du **Lemme Clé B1** tout en gardant les notations utilisées dans ce chapitre.

3.3.1 Récapitulatif de la situation et notations

Nous considérons deux germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2^o espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalents tels qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_0} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible⁴² aux marquages. Nous notons $\mathcal{U} = \{(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)_{i \in \Sigma_{\omega} \cup \text{Comp}(D_{\omega})}\}$ un germe de recouvrement adapté du germe de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$. Nous avons montré, dans la sous-section 3.2.2, l'existence d'une collection d'extensions locales adaptées au biholomorphisme φ et au recouvrement \mathcal{U} ,

$$\wp = \left((f_{(ij)})_{(i,j) \in \Sigma_{\varpi} \times \text{Comp}(D_{\varpi})}, (f_j)_{j \in \text{Comp}(D_{\varpi})} \right),$$

tel que le quasi-cocycle $\partial(\wp)$ est un quasi-cocycle de quintessence du couple $(\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}, \mathcal{U})$. Dans la suite de cette section, fixons un tel \wp et notons le quasi-cocycle associé :

$$\partial(\wp) = \left((\phi_i = f_{(ij)}^{-1} \circ f_{(ik)}), (\phi_{i,j} = f_j^{-1} \circ f_{(ij)}) \right)$$

En utilisant la proposition 3.1.4, nous pouvons préciser :

⁴¹ Cf. 0.2.1 Singularités réduites

⁴² Cf. §1.2.2.

1. ϕ_i est un élément de $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, \sigma_{\omega_0}(i)})}\right)$ holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, \sigma_{\omega_0}(i)})}\right)$.
2. $\phi_{i,j}$ est un élément de $Aut_0\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j})}\right)$ holomorphiquement fortement isotope à l'identité dans $Aut\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j})}\right)$.

En effet 1. est obtenu en utilisant le point 1. de 3.1.4. Pour obtenir 2., deux cas se présentent :

- $\sigma_{\omega_0}(i)$ n'est pas de type noeud-col sc (Cf. 0.2.1 Singularités réduites). On applique le point 2.b de 3.1.4.
- $\sigma_{\omega_0}(i)$ est de type noeud-col sc. Comme le quasi-cocycle $\partial(\varphi)$ est de quintessence, l'automorphisme $\phi_{i,j}$ est, par définition, un élément de

$$Fix\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j})}\right)$$

et on applique le point 2.a de 3.1.4.

Fixons les isotopies ainsi obtenues, nous les notons :

1. pour chaque $i \in Sing(D_{\varpi})$,

$$\begin{aligned} \Phi_i : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, \sigma_{\omega_0}(i) \times [0, 1]) &\rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, \sigma_{\omega_0}(i) \times [0, 1]), \\ (z, s) &\mapsto (\phi_{i,s}(z), s) \end{aligned}$$

telle que $\Phi_i(\cdot, 0) = id$ et $\Phi_i(\cdot, 1) = \phi_i$ et Φ_i est un germe de biholomorphisme de $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, \sigma_{\omega_0}(i) \times [0, 1])$ dans lui-même qui conjugue le germe de déploiement trivial, $\mathcal{F}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, \sigma_{\omega_0}(i)})} \times (\mathbb{C}, [0, 1])$, à lui-même.

2. Pour chaque $j \in Comp(D_{\varpi})$ chaque $i \in \Sigma_{\varpi}$ contenue dans j ,

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} : (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, (U_i \cap U_j) \times [0, 1]) &\rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, (U_i \cap U_j) \times [0, 1]), \\ (z, s) &\mapsto (\phi_{i,j,s}(z), s) \end{aligned}$$

est une isotopie qui vérifie $\Phi_{i,j}(\cdot, 0) = id$, $\Phi_{i,j}(\cdot, 1) = \phi_{i,j}$ et $\Phi_{i,j}$ est un germe de biholomorphisme de $(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \mathbb{C}, (U_i \cap U_j) \times [0, 1])$ dans lui-même qui conjugue le germe de déformation constante, $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, U_i \cap U_j})}^{cste}$, à lui-même.

3.3.2 Construction d'une déformation au voisinage de chaque composante irréductible du diviseur D_{ω_0} .

Lemme 3.3.1 *Sous les conditions du Lemme Clé B1, pour chaque $j \in Comp(D_{\varpi})$, il existe un quadruplet $((\mathcal{M}_j, D_j), \Sigma_j, \mathcal{F}_j, \Pi_j)$ qui vérifie :*

1. (a) \mathcal{M}_j est une variété holomorphe de dimension 3.
- (b) D_j est une hypersurface lisse de \mathcal{M}_j \mathcal{C}^∞ -difféomorphe à $\mathbb{P}^1 \times (\mathbb{C}, [0, 1])$, par un difféomorphisme fibré au-dessus de $(\mathbb{C}, [0, 1])$.
- (c) Σ_j est un sous espace lisse de D_j .
- (d) \mathcal{F}_j est un germe le long de D_j de feuilletage holomorphe de dimension 1 sur \mathcal{M}_j .

2. (a) Π_j est un germe le long de D_j de submersion holomorphe de \mathcal{M}_j sur $(\mathbb{C}, [0, 1])$.
- (b) La restriction de Π_j à D_j est une submersion lisse, propre.
- (c) La restriction de Π_j à chaque composante connexe de Σ_j est un bi-holomorphisme sur $(\mathbb{C}, [0, 1])$.
- (d) Les feuilles du feuilletage \mathcal{F}_j sont contenues dans les fibres de Π_j .
3. (a) Il existe un germe de biholomorphisme $\nu_j : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(j)) \rightarrow \Pi_j^{-1}(0)$ qui conjugue les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(j))}$ et $\mathcal{F}_j|_{\Pi_j^{-1}(0)}$.
- (b) Il existe un germe de biholomorphisme $F_j : \Pi_j^{-1}(1) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j))$ qui conjugue les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j))}$ et $\mathcal{F}_j|_{\Pi_j^{-1}(1)}$.

Preuve. Fixons $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$ et notons S_j l'ensemble des points singuliers de $\tilde{\mathcal{F}}_{\varpi}$ portés par la composante j .

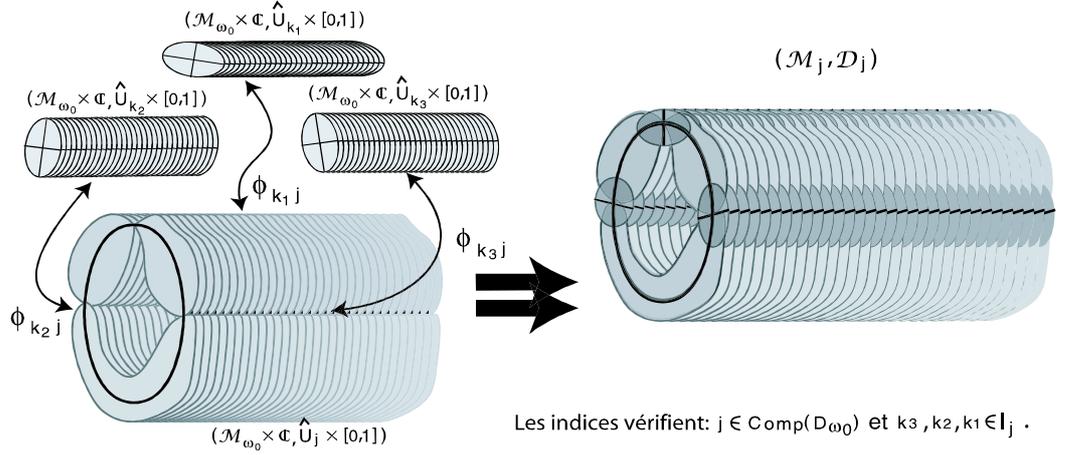


FIG. 11 – (Preuve du lemme 3.3.1) Construction de la variété (\mathcal{M}_j, D_j) par recollements.

Construction de la variété (\mathcal{M}_j, D_j) .

La variété (\mathcal{M}_j, D_j) est obtenue en recollant les germes d'ouverts $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_k) \times (\mathbb{C}, [0, 1])$, $k \in S_j \cup \{j\}$, le long des germes d'ouverts $(\mathcal{M}_{\omega_0}, (U_k \cap U_j)) \times (\mathbb{C}, [0, 1])$, $k \in S_j$, au moyen des applications $\Phi_{k,j}$, $k \in S_j$. Les bijections $\Phi_{k,j}|_{(U_k \cap U_j) \times (\mathbb{C}, [0, 1])}$ laissant les ouverts $(U_k \cap U_j) \times (\mathbb{C}, [0, 1])$ invariants, la variété D_j obtenue en recollant les germes d'ouverts $U_k \times (\mathbb{C}, [0, 1])$ au moyen des applications $\Phi_{k,j}$ est une hypersurface de \mathcal{M}_j .

Le lecteur peut vérifier que l'espace obtenu est séparé⁴³. Dans la suite de ce chapitre nous notons :

- V_k^j l'image canonique de l'ouvert $U_k \times (\mathbb{C}, [0, 1])$ dans la variété \mathcal{M}_j , $k \in S_j \cup \{j\}$.

⁴³ou bien il peut remarquer, à la fin de cette démonstration, que nous n'avons fait que modifier la structure holomorphe de l'espace topologique $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$. Ce qui n'affecte pas la séparabilité de cet espace.

- $\rho_{j,k} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, U_k) \times (\mathbb{C}, [0, 1]) \rightarrow (\mathcal{M}_j, V_k^j)$ le germe de plongement canonique qui vérifie $\rho_{j,k}^{-1} \circ \rho_{j,j} = \Phi_{k,j}$, $k \in S_j \cup \{j\}$.
- $\Pi_j : (\mathcal{M}_j, D_j) \rightarrow P = (\mathbb{C}, [0, 1])$ le germe de submersion naturel induit par les projections

$$pr_{2,j} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(j)) \times (\mathbb{C}, [0, 1]) \rightarrow (\mathbb{C}, [0, 1])$$

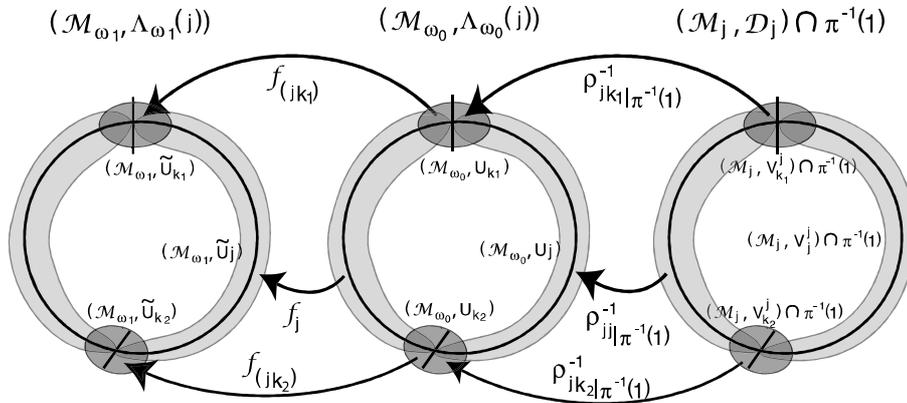
Atlas holomorphe sur (\mathcal{M}_j, D_j) .

Nous pouvons décrire la structure holomorphe de (\mathcal{M}_j, D_j) au moyen de l'atlas $\mathcal{A}_j = \left((\mathcal{M}_j, V_k^j), (\xi_k \times id) \circ \rho_{j,k}^{-1} \right)_{k \in S_j \cup \{j\}}$ où $\mathcal{A}_{\omega_0}^{ste} = ((\mathcal{M}_{\omega_0}, U_k), \xi_k)$ est un atlas holomorphe décrivant la structure holomorphe de $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$ distinguée pour le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$.

Existence d'un feuilletage \mathcal{F}_j sur la variété (\mathcal{M}_j, D_j) .

L'application $\Phi_{k,j}$ est un élément de $Aut\left(\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_k \cap U_j)}\right)^{cste}\right)$, $k \in S_j$. Les feuilletages $\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_k)}\right)^{cste}$, $k \in S_j \cup \{j\}$, se recollent en un feuilletage holomorphe global de dimension 1, noté \mathcal{F}_j , dont chaque feuille est contenue dans une fibre de Π_j .

Remarquons surtout que si chaque automorphisme $\phi_{k,j}$, $k \in S_j$, avait été un élément de $Fix(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_k \cap U_j)})$ nous aurions construit ainsi un feuilletage de codimension 1.



où j est une composante irréductible du diviseur, k_1 une singularité du diviseur, k_2 un point régulier du diviseur, singulier du feuilletage.

FIG. 12 – (Preuve du lemme 3.3.1) Construction de l'application F_j .

Vérification des assertions 3.(a) et 3.(b).

L'assertion 3.(a) découle directement du fait que, pour tout $k \in S_j \cup \{j\}$, l'application $\phi_{k,j,0}$ est l'identité sur $(\mathcal{M}_{\omega_0}, (U_k \cap U_j)) \times \{0\}$. L'assertion 3.(b) est tout aussi évidente, mais nous l'explicitons tout de même : L'application $F_j : \Pi_j^{-1}(1) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j))$ est définie sur chaque ouvert $(\mathcal{M}_j, V_k^j) \cap \Pi_j^{-1}(1)$ par

$$\begin{cases} f_j \circ \rho_{j,j|\Pi_j^{-1}(1)}^{-1} & \text{si } k = j \\ f_{(kj)} \circ \rho_{j,k|\Pi_j^{-1}(1)}^{-1} & \text{si } k \neq j \end{cases}$$
 où les applications f_j et $f_{(kj)}$ sont les germes de biholomorphismes appartenant à la collection d'extensions locales \wp adaptées au biholomorphisme φ et au recouvrement \mathcal{U} . Cette application est un germe de biholomorphisme global qui conjugue les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j))}$ et $\mathcal{F}_{j|\Pi_j^{-1}(1)}$.

Ce qui termine cette démonstration. ■

3.3.3 Preuve du lemme clé B1

. Nous conservons les notations introduites dans la preuve du lemme 3.3.1.

Construction de la variété (\mathcal{M}, D) .

Considérons le germe de variété (\mathcal{M}, D) obtenu en recollant les germes de variété (\mathcal{M}_j, D_j) , $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, le long des ouverts (\mathcal{M}_j, V_i^j) et (\mathcal{M}_k, V_i^k) au moyen des germes d'application $F_{j,k} = \rho_{k,i} \circ \Phi_i \circ \rho_{j,i}^{-1} : (\mathcal{M}_j, V_i^j) \rightarrow (\mathcal{M}_k, V_i^k)$, avec $j, k \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, $i \in \Sigma_{\varpi}$ et $j \cap k = i$. Le lecteur peut vérifier⁴⁴ que l'espace obtenu est séparé.

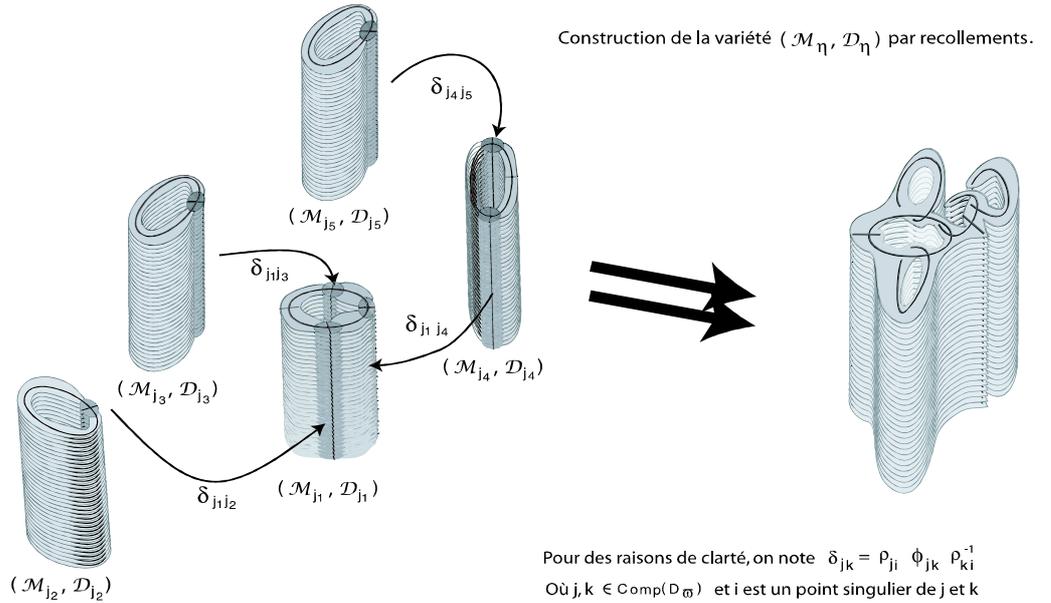


FIG. 13 – (Preuve du Lemme Clé B1) Construction de la variété (\mathcal{M}, D) par recollement des variétés (\mathcal{M}_j, D_j) .

L'application $\Phi_i|_{(D_{\omega_0} \times \mathbb{C}, \sigma_{\omega_0}(i) \times [0,1])}$ est un biholomorphisme qui vérifie l'égalité des germes

$$\Phi_i(\Lambda_{\omega_0}(l) \times \mathbb{C}, \sigma_{\omega_0}(i) \times [0,1]) = (\Lambda_{\omega_0}(l) \times \mathbb{C}, \sigma_{\omega_0}(i) \times [0,1]),$$

⁴⁴ou bien il peut remarquer, à la fin de cette démonstration, que nous n'avons fait que modifier la structure holomorphe de l'espace topologique $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$. Ce qui n'affecte pas la séparabilité de cet espace.

où $l = k, j$. Ainsi, la variété D est obtenue en recollant les ouverts V_i^j au moyen des applications Φ_i est un diviseur à croisements normaux dont chaque composante irréductible est munie d'un biholomorphisme sur un unique $D_j \times (\mathbb{C}, [0, 1])$, $j \in \text{Comp}(D_\varpi)$. Dans la suite de cette démonstration nous notons :

- $(\hat{\mathcal{M}}_j, \hat{D}_j)$ l'image canonique de la variété (\mathcal{M}_j, D_j) dans la variété (\mathcal{M}, D) , $j \in \text{Comp}(D_\varpi)$, $k \in S_j \cup \{j\}$.
- \hat{V}_k^j l'image canonique de l'ouvert V_k^j dans la variété (\mathcal{M}, D) , $j \in \text{Comp}(D_\varpi)$, $k \in S_j \cup \{j\}$.
- $g_j : (\mathcal{M}_j, D_j) \rightarrow (\hat{\mathcal{M}}_j, \hat{D}_j)$ le germe de plongement canonique qui vérifie $g_k^{-1} \circ g_j = \rho_{k,i} \circ \Phi_i \circ \rho_{j,i}^{-1}$ pour tout $j, k \in \text{Comp}(D_\varpi)$ d'intersection $i \in \Sigma_\varpi$.
- $\Pi : (\mathcal{M}, D) \rightarrow P = (\mathbb{C}, [0, 1])$ le germe de submersion naturel induit par

$$\Pi_j : (\mathcal{M}_j, D_j) \rightarrow (\mathbb{C}, [0, 1]).$$

Atlas holomorphe sur (\mathcal{M}, D) .

Nous pouvons décrire la structure holomorphe de (\mathcal{M}, D) au moyen de l'atlas

$$\mathcal{A}^{st} = \left(\left(\mathcal{M}, \hat{V}_k^j \right), (\xi_k \times id) \circ \rho_{j,k}^{-1} \circ g_j^{-1} \right)_{j \in \text{Comp}(D_\varpi), k \in S_j \cup \{j\}}$$

où

$$\mathcal{A}_j = \left(\left(\mathcal{M}_j, V_k^j \right), (\xi_k \times id) \circ \rho_{j,k}^{-1} \right)_{k \in S_j \cup \{j\}}$$

est l'atlas holomorphe utilisé (dans la preuve du lemme 3.3.1) pour décrire la structure holomorphe de (\mathcal{M}_j, D_j) , $j \in \text{Comp}(D_\varpi)$.

Existence du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la variété (\mathcal{M}, D) .

L'existence d'un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la variété (\mathcal{M}, D) est garanti par le fait que les applications de recollement $F_{j,k} : (\mathcal{M}_j, V_i^j) \rightarrow (\mathcal{M}_k, V_i^k)$ conjugue le feuilletage \mathcal{F}_j au feuilletage \mathcal{F}_k . En effet, aux points d'intersection des diviseurs considérés, les deux feuilletages \mathcal{F}_j et \mathcal{F}_k sont conjugués, par les cartes des variétés respectives, au même feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \times \mathbb{C}$ et $F_{j,k}$, dans ces mêmes cartes s'exprime comme l'automorphisme $\Phi_{k,j}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \times \mathbb{C}$.⁴⁵

Description du marquage par \mathcal{F}_ϖ induit sur $((\mathcal{M}, D), \tilde{\mathcal{F}})$ par cette construction.

Les applications de marquage $(\Lambda, \sigma, \Gamma_j)$ sont naturellement définies sur (\mathcal{M}, D) par :

- $\Lambda(j) = g_j(D_j)$, pour tout $j \in \text{Comp}(D_\varpi)$.
 - $\sigma(i) = g_j \circ \rho_{j,i} \circ \sigma_{\omega_0}(i)$ pour tout $i \in \Sigma_\varpi$ avec $i \in j \in \text{Comp}(D_\varpi)$.
- Remarquons de plus que si $i = j \cap k$, avec $k \in \text{Comp}(D_\varpi)$, on a égalité

$$g_j \circ \rho_{j,i} \circ \sigma_{\omega_0}(i) = g_k \circ \rho_{k,i} \circ \sigma_{\omega_0}(i).$$

⁴⁵Plus précisément, pour tout $j, k \in \text{Comp}(D_\varpi)$ d'intersection $i \in \Sigma_\varpi$, l'application Φ_i est un élément de $\text{Fix} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \times (\mathbb{C}, [0, 1]) \right)$, les applications $\rho_{k,i}$ et $\rho_{j,i}$ vérifient

$$\rho_{i,i}^* \left(\mathcal{F}_{l|(\mathcal{M}_l, V_i^l)} \right) = \tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \sigma_{\omega_0}(i))} \times (\mathbb{C}, [0, 1]),$$

pour $l = k, j$. Les feuilletages \mathcal{F}_j et \mathcal{F}_k se recollent en un feuilletage global de dimension 1, dont chaque feuille est contenue dans une fibre de Π .

$$- \Gamma_{j|\Pi^{-1}(s)} = g_{j|\Pi^{-1}(s)} \circ \rho_{j,j}(\mathcal{M}_{\omega_0} \times \{s\}, U_j \times \{s\}) (\Gamma_{\omega_0, j}),$$

pour tout $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, tout $s \in [0, 1]$.

Existence de plongement des germes de variété $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$ et $(\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1})$ dans (\mathcal{M}, D) qui conjuguent les feuilletages.

Nous avons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}) & \xrightarrow{\nu_0} & (\mathcal{M}, D) & \xleftarrow{\nu_1} & (\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}) \\ \downarrow \Pi & \square & \downarrow \Pi & \square & \downarrow \Pi \\ 0 & \hookrightarrow & (\mathbb{C}, [0, 1]) & \hookleftarrow & 1 \end{array}$$

$$\text{tels que } \nu_0^* \left(\tilde{\mathcal{F}}_{|\Pi^{-1}(0)} \right) = \tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0} \text{ et } \nu_1^* \left(\tilde{\mathcal{F}}_{|\Pi^{-1}(1)} \right) = \tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}.$$

Existence de ν_0 :

Pour tout $j, k \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, $j \cap k = i \in \Sigma_{\varpi}$, les applications $\phi_{k,j,o}$ étant l'identité, les germes de biholomorphisme $\nu_j : (\mathcal{M}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(j)) \rightarrow \Pi_j^{-1}(0)$, dus au lemme 3.3.1, induisent un germe de biholomorphisme global que nous notons $\nu_0 : (\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0}) \rightarrow \Pi^{-1}(0)$ défini ⁴⁶ pour tout $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$ par

$$\nu_0|_{(\mathcal{M}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(j))} = g_{j|\Pi_j^{-1}(0)} \circ \nu_j.$$

Enfin remarquons, pour chaque $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, l'égalité des germes de feuilletage

$$\begin{aligned} \left(g_{j|\Pi_j^{-1}(0)} \circ \nu_j \right)^* \left(\tilde{\mathcal{F}}_{|\Pi^{-1}(0) \cap (\mathcal{M}, \Lambda(j))} \right) &= \nu_j^* \left(\mathcal{F}_{j|\Pi_j^{-1}(0)} \right) \\ &= \tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, \Lambda_{\omega_0}(j))}. \end{aligned}$$

Existence de ν_1 :

Les applications, dues au lemme 3.3.1,

$$F_j : \Pi_j^{-1}(1) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j)), j \in \text{Comp}(D_{\varpi}),$$

sont des germes de biholomorphisme qui conjuguent les germes de feuilletage

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j))} \text{ et } \mathcal{F}_{j|\Pi_j^{-1}(1)}.$$

Ces applications induisent un germe de biholomorphisme global⁴⁷

$$\nu_1 : (\mathcal{M}_{\omega_1}, D_{\omega_1}) \rightarrow \Pi^{-1}(1)$$

défini par

$$\nu_1|_{(\mathcal{M}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}(j))} = g_{j|\Pi_j^{-1}(1)} \circ F_j^{-1}$$

⁴⁶ En effet, soient $j, k \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, $j \cap k = i \in \Sigma_{\varpi}$, plaçons nous sur l'ouvert $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)$, nous avons alors : $\nu_k^{-1} \circ g_{k,0}^{-1} \circ g_{j,0} \circ \nu_j = \nu_k^{-1} \circ \rho_{k,i,0} \circ \phi_{i,o} \circ \rho_{j,i,0}^{-1} \circ \nu_j = \rho_{k,i,0}^{-1} \circ \rho_{k,i,0} \circ \phi_{i,o} \circ \rho_{j,i,0}^{-1} \circ \rho_{j,i,0} = \phi_{i,o} = id$, où $g_{l,0} = g_{l|\Pi_l^{-1}(0)}$ et $\rho_{l,i,0} = \rho_{l,i}(\mathcal{M}_{\omega_0} \times 0, U_l \times 0)$ avec $l = k, j$.

⁴⁷ En effet, soient $j, k \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, $j \cap k = i \in \Sigma_{\varpi}$, plaçons nous sur l'ouvert $(\mathcal{M}_{\omega_0}, U_i)$, nous avons alors : $F_k \circ g_{k,1}^{-1} \circ g_{j,1} \circ F_j^{-1} = F_k \circ \rho_{k,i,1} \circ \phi_{i,1} \circ \rho_{j,i,1}^{-1} \circ F_j^{-1} = f_{(ik)} \circ \rho_{k,i,1}^{-1} \circ \rho_{k,i,1} \circ \phi_{i,1} \circ \rho_{j,i,1}^{-1} \circ \rho_{j,i,1} \circ f_{(ij)}^{-1} = f_{(ik)} \circ \phi_{i,1} \circ f_{(ij)}^{-1} = f_{(ik)} \circ \phi_i \circ f_{(ij)}^{-1} = f_{(ik)} \circ f_{(ik)}^{-1} \circ f_{(ij)} \circ f_{(ij)}^{-1} = id$, où $g_{l,1} = g_{l|\Pi_l^{-1}(1)}$ et $\rho_{l,i,1} = \rho_{l,i}(\mathcal{M}_{\omega_0} \times 1, U_l \times 1)$ avec $l = k, j$.

qui conjugue les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{|\Pi^{-1}(1)}$.

Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la variété (\mathcal{M}, D) induit l'existence d'une déformation SL-équisingulière qui SL-relie faiblement les feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} .

L'auto-intersection de la composante irréductible $\Lambda(j) \cap \Pi^{-1}(0)$ dans $\Pi^{-1}(0)$ est la même que celle de $\Lambda_{\omega_0}(j)$ dans $(\mathcal{M}_{\omega_0}, D_{\omega_0})$, pour tout $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$. Ainsi en utilisant le corollaire 2.3.2 du théorème de Grauert à paramètre, nous savons que $((\mathcal{M}, D), \tilde{\mathcal{F}})$ est biholomorphe à la cime d'un arbre de résolution d'un germe de feuilletage, que nous notons \mathcal{F} , sur $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \times [0, 1])$ de dimension 1. Par construction, \mathcal{F} est un germe de déformation SL-équisingulier de \mathcal{F}_{ω_0} le long de $0 \times (\mathbb{C}, [0, 1])$ de paramètre $(\mathbb{C}, [0, 1])$ qui SL-relie faiblement les feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} .

Réalisation de l'équivalence des marquages donnée par hypothèse.

Pour terminer cette démonstration, il suffit de vérifier que les marquages par \mathcal{F}_{ϖ} de la déformation et des feuilletages sont compatibles : Nous voulons montrer que

$$\nu_0^{-1} \circ \begin{cases} \Lambda_{|\Pi^{-1}(0)} \\ \sigma_{|\Pi^{-1}(0)} \\ \Gamma_{j|\Pi^{-1}(0)} \end{cases} = \begin{cases} \Lambda_{\omega_0} \\ \sigma_{\omega_0} \\ \Gamma_{\omega_0, j} \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu_1^{-1} \circ \begin{cases} \Lambda_{|\Pi^{-1}(1)} \\ \sigma_{|\Pi^{-1}(1)} \\ \Gamma_{j|\Pi^{-1}(1)} \end{cases} = \begin{cases} \Lambda_{\omega_1} \\ \sigma_{\omega_1} \\ \Gamma_{\omega_1, j} \end{cases} .$$

Pour cela, seuls les calculs permettent d'être efficace. Fixons $i \in \Sigma_{\varpi}$ et $j \in \text{Comp}(D_{\varpi})$, tel que $i \in j$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} \nu_0^{-1} \circ \Lambda_{|\Pi^{-1}(0)}(j) &= \nu_0^{-1} \circ g_{j,0}(D_j) \\ &= \nu_j^{-1} \circ \nu_j \circ g_{j,0}(D_j) \\ &= \nu_j^{-1}(D_j) = \Lambda_{\omega_0}(j) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_0^{-1} \circ \sigma_{|\Pi^{-1}(0)}(i) &= \nu_0^{-1} \circ g_{j,0} \circ \rho_{j,i,0}(\sigma_{\omega_0}(i)) \\ &= \nu_j^{-1} \circ \rho_{j,i,0}(\sigma_{\omega_0}(i)) \\ &= \rho_{j,i,0}^{-1} \circ \rho_{j,i,0}(\sigma_{\omega_0}(i)) = \sigma_{\omega_0}(i) . \end{aligned}$$

$$\nu_0^{-1} \circ \Gamma_{j|\Pi^{-1}(0)} = \nu_0^{-1} \circ g_{j,0} \circ \rho_{j,j,0}(\Gamma_{\omega_0, j}) = \Gamma_{\omega_0, j} .$$

De même :

$$\begin{aligned} \nu_1^{-1} \circ \Lambda_{|\Pi^{-1}(1)}(j) &= \nu_1^{-1} \circ g_{j,1}(D_j) \\ &= F_j \circ g_{j,1}^{-1} \circ g_{j,1}(D_j) \\ &= F_j(D_j) = \Lambda_{\omega_1}(j) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_1^{-1} \circ \sigma_{|\Pi^{-1}(1)}(i) &= \nu_1^{-1} \circ g_{j,1} \circ \rho_{j,i,1}(\sigma_{\omega_0}(i)) \\ &= F_j \circ \rho_{j,i,1}(\sigma_{\omega_0}(i)) \\ &= f_{(ij)} \circ \rho_{j,i,1}^{-1} \circ \rho_{j,i,1}(\sigma_{\omega_0}(i)) \\ &= f_{(ij)}(\sigma_{\omega_0}(i)) = \sigma_{\omega_1}(i) . \end{aligned}$$

$$\nu_1^{-1} \circ \Gamma_{j|\Pi^{-1}(1)} = f_{(jj)}(\Gamma_{\omega_0, j}) = \Gamma_{\omega_1, j} .$$

La démonstration est maintenant finie, nous n'avons plus rien à construire et plus rien à vérifier. ■

3.4 Démonstration rapide du Théorème B.

Considérons deux germes de feuilletages holomorphes, $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$, de $(\mathbb{C}^2, 0)$, singuliers à l'origine, de 2^o espèce générale, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalents.

En appliquant le **Théorème A** à ces feuilletages marqués, nous obtenons l'existence d'un feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_2}^{\mathcal{M}}$ marqué par \mathcal{F}_{ϖ} , SL-équivalent à $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ tel que :

1. Les feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}^{\mathcal{M}}$ sont SL-cobordants.
2. Il existe un biholomorphisme $\varphi : D_{\omega_2} \rightarrow D_{\omega_1}$ compatible aux marquages.

En appliquant le **Lemme Clé B1** aux germes de feuilletages, marqués par \mathcal{F}_{ϖ} , $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}^{\mathcal{M}}$, nous obtenons que ces germes de feuilletages sont faiblement SL-reliés. Par définition de la faible SL-reliabilité, cela signifie que les feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ sont faiblement SL-reliés. Ce qui conclut cette démonstration.

4 Applications aux singularités simples.

4.1 Définition de feuilletage pré-simple.

Considérons un germe de feuilletage holomorphe \mathcal{F}_ω de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine.

Définition 4.1.1 *Le germe de feuilletage \mathcal{F}_ω est dit pré-simple si l'entier*

$$\delta(\omega) = \sum_c \frac{(\nu_c - 1)(\nu_c - 2)}{2}$$

est nul où h est la hauteur de l'arbre de réduction de \mathcal{F}_ω et où c décrit l'ensemble $\bigsqcup_{j=0, \dots, h} S_\omega^{(j)}$ de tous les points singuliers⁴⁸ que l'on éclate lors de la réduction de ω , et ν_c désigne la multiplicité⁴⁹ en $c \in S_\omega^{(j)}$ du saturé du feuilletage $(E_\omega^{(j)})^(\mathcal{F}_\omega)$. Ce nombre est la dimension de l'espace universel des germes de déploiements équisinguliers de ω , [Mat₁].*

Lorsque le feuilletage \mathcal{F}_ω possède une intégrale première, $\omega \wedge df = 0$ et que f est à singularité isolée, alors l'entier $\delta(df)$ est la dimension de la strate à μ constante de f . Il est appelé dans [Arn₁] par Arnol'd *le type modulaire* de f , noté $m(f)$. Lorsque le type modulaire de f est nul on dit que f est *simple*.

Nous dirons qu'un germe de feuilletage est *d-stable* si tout germe de déploiement équisingulier de \mathcal{F}_ω est analytiquement trivial. On a le résultat, dû à J.F. Mattei [Mat₁], suivant :

Théorème 4.1.2 *Un germe de feuilletage \mathcal{F}_ω est d-stable si, et seulement si, il est pré-simple.*

Supposons que le germe de feuilletage \mathcal{F}_ω est de 2^o espèce⁵⁰. Il est non dicritique et n'a donc qu'un nombre fini de "séparatrices formelles" : il existe un nombre fini de germes de courbes irréductibles d'équation $\hat{f}_i = 0$, $\hat{f}_i \in \mathbb{C}\{\{x\}\}$, $i = 1, \dots, m$ qui vérifient $\omega \wedge d\hat{f}_i = \hat{f}_i \eta_i$ où $\eta_i \in \hat{\Lambda}_{(\mathbb{C}^2, 0)}^2$. On associe à ω la courbe formelle $\widehat{sep}(\omega)$ d'équation $\hat{f} = \hat{f}_1 \dots \hat{f}_m$. J.F. Mattei et E. Salem ont démontré dans [Mat-Sal₂] et [Mat-Sal₃] que ω et $d\hat{f}$ ont même arbre dual pondéré par multiplicité⁵¹, $\mathbb{A}_{d\hat{f}}^\vee = \mathbb{A}_\omega^\vee$. Cela implique, en particulier, que ω et \hat{f} ont exactement le même arbre de réduction et qu'en chaque point singulier $c \in S_\omega^{(j)} = S_{d\hat{f}}^{(j)}$, les multiplicités⁵² des transformées strictes des feuilletages \mathcal{F}_ω et $\mathcal{F}_{d\hat{f}}$ sont égales. Les entiers $\delta(\omega)$ et $\delta(d\hat{f})$ ne dépendant que de la multiplicité des feuilletages en leurs points singuliers, ces entiers $\delta(\omega)$ et $\delta(d\hat{f})$ sont égaux.

Remarquons que l'arbre de réduction de \hat{f} est identique à celui de son polynôme de Taylor P_r tronqué à un ordre r , suffisamment grand, et que l'on a égalité $\delta(d\hat{f}) = m(\hat{f}) = m(P_r) = \delta(dP_r)$. Ainsi, ω est pré-simple ssi $d\hat{f}$ est pré-simple ssi P_r est simple. Lorsque P_r est simple, d'après Arnol'd [Arn₁], quitte à effectuer un changement de variable holomorphe, P_r est un polynôme de type :

⁴⁸ Cf. § 0.2.

⁴⁹ Cf. § 0.2.2.

⁵⁰ Cf. § 1.4.

⁵¹ Cf. § 0.2.2.

⁵² Cf. § 0.2.2.

1. A_{2n} lorsque $P_r = x^{2n+1} + y^2$, $n \geq 1$,
2. A_{2n-1} lorsque $P_r = x^{2n} + y^2$, $n \geq 1$,
3. D_{2n} lorsque $P_r = x^{2n-1} + y^2x$, $n \geq 2$,
4. D_{2n+1} lorsque $P_r = x^{2n} + y^2x$, $n \geq 2$,
5. E_6 lorsque $P_r = y^3 + x^4$,
6. E_7 lorsque $P_r = y^3 + yx^3$,
7. E_8 lorsque $P_r = y^3 + x^5$.

Pour chacun de ces cas, nous donnons une représentation de la cime de l'arbre de résolution associé au feuilletage \mathcal{F}_{P_r} , où les flèches représentent la transformée stricte des composantes irréductibles de la courbe $P_r = 0$. Nous donnons aussi l'arbre dual de cette résolution et, lorsque cela est utile, le nombre de composantes irréductibles du diviseur associé :

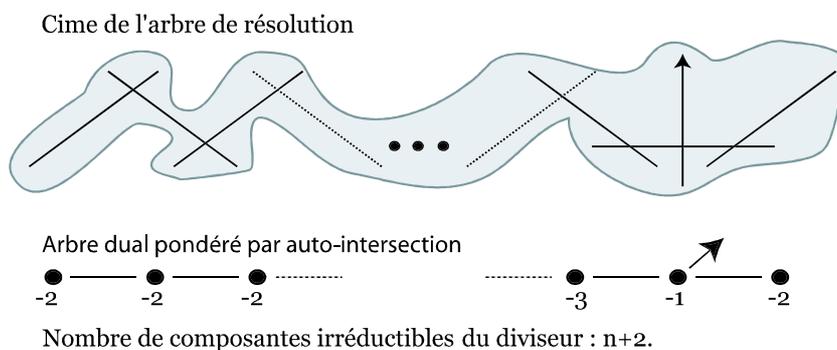


FIG. 14 – Polynôme de type $A_{2n} : x^{2n+1} + y^2$, $n \geq 1$.

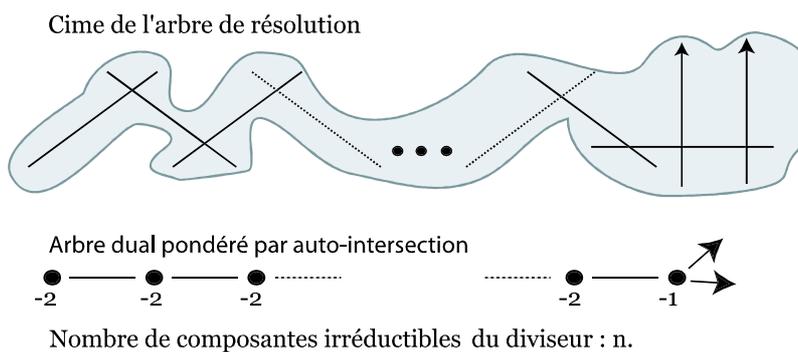


FIG. 15 – Polynôme de type $A_{2n-1} : x^{2n} + y^2$, $n \geq 1$.

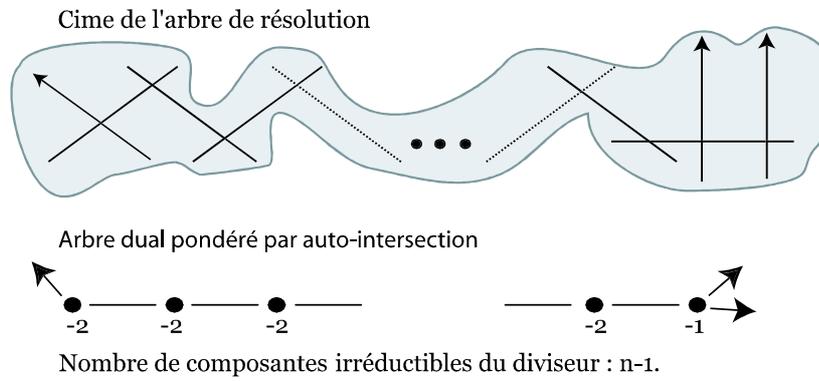


FIG. 16 – Polynôme de type $D_{2n} : x^{2n-1} + y^2x, n \geq 2$.

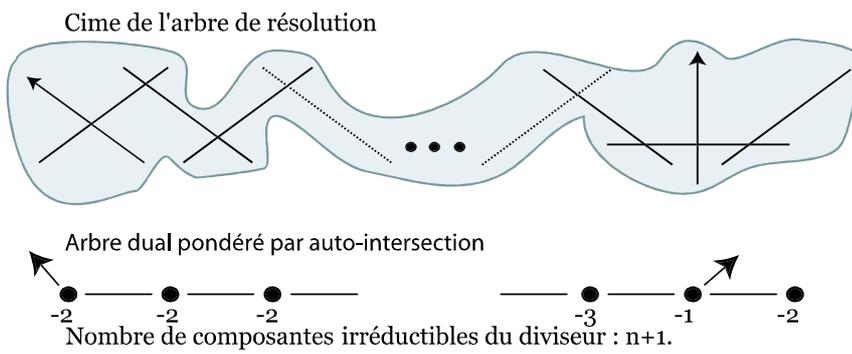
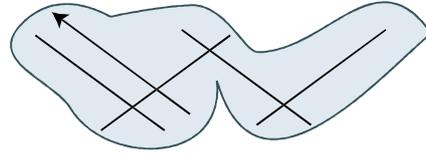


FIG. 17 – Polynôme de type $D_{2n+1} : x^{2n} + y^2x, n \geq 2$.

Cime de l'arbre de résolution

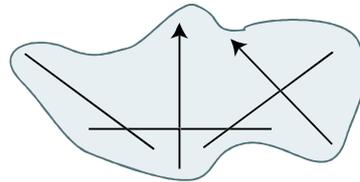


Arbre dual pondéré par auto-intersection



FIG. 18 – Polynôme de type $E_6 : y^3 + x^4$.

Cime de l'arbre de résolution



Arbre dual pondéré par auto-intersection

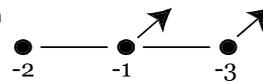
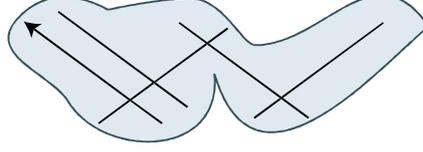


FIG. 19 – Polynôme de type $E_7 : y^3 + yx^3$.

Cime de l'arbre de résolution



Arbre dual pondéré par auto-intersection



FIG. 20 – Polynôme de type $E_8 : y^3 + x^5$.

Remarquons que les arbres duaux de cette liste sont deux à deux distincts, cela nous amène à dire qu'un germe de feuilletage \mathcal{F}_ω de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2^o espèce pré-simple est dit de type A , resp. D , resp. E si son arbre dual est de type A_k , resp. D_k , resp. E_6, E_7, E_8 .

4.2 Etude de la SL-équivalence pour les feuilletages pré-simples.

Fixons \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2^o espèce, pré-simples, tels que $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee = \mathbb{A}_{\omega_1}^\vee$. Notons $P^{(0)}$, resp. $P^{(1)}$, le dernier diviseur créé lors de la réduction par éclatements du feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} , resp. du feuilletage \mathcal{F}_{ω_1} . Cette composante irréductible est la seule à porter trois singularités. Notons les $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}$, $i = 0, 1$. Lorsque \mathcal{F}_{ω_0} est de type A_{2n}, D_{2n+1} ou E , deux de ces singularités $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}$ sont les intersections avec $P^{(i)}$ de 2 composantes irréductibles d'auto-intersection distinctes, $i = 0, 1$. Ainsi il existe une unique bijection $\sigma : \{s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}\} \rightarrow \{s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}\}$ telle que pour tout $j = 1, 2, 3$ les points singuliers $s_j^{(0)}$ et $\sigma(s_j^{(0)})$ se trouvent sur des composantes irréductibles de même auto-intersection. Quitte à réindexer les singularités, on suppose que $\sigma(s_j^{(0)}) = s_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$.

Nous avons les propriétés suivantes :

Lemme 4.2.1 Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2^o espèce, pré-simples, de même type A_{2n}, E_6 ou E_8 . La donnée, sur chacun des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} , d'un marquage par \mathcal{F}_{ω_0} , pour lesquels ces feuilletages marqués sont SL-équivalents correspond à la donnée :

1. Pour chaque $i = 0, 1$, d'un germe de transversale $(T^{(i)}, q^{(i)})$ à la composante $P^{(i)}$.
2. Pour chaque $i = 0, 1$, d'un système complet simple de lacets $(\gamma_j^{(i)}, q^{(i)})$ sur $P^{(i)} - \{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}\}$.
3. D'un germe de biholomorphisme $\Phi : (T^{(0)}, q^{(0)}) \rightarrow (T^{(1)}, q^{(1)})$ qui conjugue les germes de difféomorphisme $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$ où $h_j^{(i)}$ est le germe de difféomorphisme d'holonomie de la singularité $s_j^{(i)}$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_i}$ associé au lacet $\gamma_j^{(i)}$ calculé sur la transversale $T^{(i)}$, $i = 0, 1, j = 1, 2, 3$.

Preuve. Nous nous permettons de subdiviser cette démonstration en petits paragraphes.

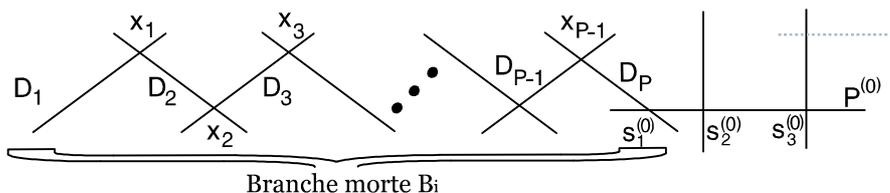
Notation

L'égalité des arbres duaux $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee, \mathbb{A}_{\omega_1}^\vee$, ainsi que leur structure, induisent l'existence de deux uniques bijections $\sigma_{\omega_1} : \Sigma_{\omega_0} \rightarrow \Sigma_{\omega_1}$ et $\Lambda_{\omega_1} : \text{Comp}(D_{\omega_0}) \rightarrow \text{Comp}(D_{\omega_1})$ qui vérifient :

- Pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, la multiplicité, resp. l'auto-intersection, de D et de $\Lambda_{\omega_1}(D)$ sont égales.
- Pour tout $j = 1, 2, 3$, on a $\sigma_{\omega_1}(s_j^{(0)}) = \sigma(s_j^{(0)}) = s_j^{(1)}$.
- Pour tout $c = D \cap D', D, D' \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, on a $\sigma_{\omega_1}(c) = \Lambda_{\omega_1}(D) \cap \Lambda_{\omega_1}(D')$.

Remarquons que l'arbre dual $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee$ se compose d'un sommet de valence 3, $P^{(0)}$, et de deux "branches mortes" que nous notons B_1, B_2 . considérons l'une d'elle, B_i . Nous indexons les diviseurs et les singularités de la manière suivante :

FIG. 21 – Le feuilletage est de type A_{2n}, E_6, E_8 .



Pour chaque $j = 1, \dots, p - 1$, nous notons $h_{j,l}$, resp. $g_{j,l}$, l'holonomie de la singularité x_j , resp. $\sigma_{\omega_1}(x_j)$, le long du diviseur D_l , resp. $\Lambda_{\omega_1}(D_l)$, de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, resp. de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$ avec $l = j, j + 1$. Sur chaque composante irréductible D du diviseur D_{ω_i} , $i = 1, 2$, on se fixe un système complet simple de lacets $\gamma_k^{(i)}$ tel que l'holonomie associée au lacet $\gamma_k^{(i)}$ soit l'un des difféomorphismes $h_{j,l}, g_{j,l}, h_j^{(0)}$ ou $h_j^{(1)}$ précédents. On note $[\Gamma_{\omega_i, D}]$ la classe de ce système. On remarque que dans le cas d'une composante irréductible D_j de valence 2 de la branche morte, le choix des lacets $\gamma_k^{(i)}$ est canonique, en effet on a l'isomorphisme $\Pi^1(D_j - \{x_{j-1}, x_j\}) \simeq \mathbb{Z}$, pour $j \neq 1$, et dans le cas de la composante irréductible D_1 de valence 1 de la branche morte, on a $\Pi^1(D_1 - \{x_1\}) \simeq 0$.

Conjugaisons, le long des branches mortes, des germes de feuilletages

$\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}|_{(\mathcal{M}_{\omega_0}, x_j)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}|_{(\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(x_j))}$.

Il reste à montrer que l'arbre dual détermine le type analytique des singularités du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ aux points x_1, \dots, x_{p-1} et $s_1^{(1)}$. Remarquons tout d'abord que les feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} , resp. \mathcal{F}_{ω_1} , étant de 2° espèce, les points singuliers du diviseur ne peuvent pas être, par définition, des points singuliers de type noeud-col du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, resp. $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$. Classiquement⁵³, les indices de Camacho-Sad se calculent, par induction le long de la branche morte, au moyen de l'auto-intersection des composantes irréductibles des diviseurs D_{ω_0} et D_{ω_1} ; il

⁵³La formule de l'indice de Camacho-Sad [Cam-Sad] met en évidence le lien entre la classe de Chern d'une composante irréductible du diviseur et les indices de Camacho-Sad de chacune des singularités réduites portées par cette composante.

suffit de commencer par calculer l'indice des singularités x_1 et $\sigma_{\omega_1}(x_1)$ puis x_2 et $\sigma_{\omega_1}(x_2)$... Cette méthode calculatoire ne dépend que des arbres duaux $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee$, $\mathbb{A}_{\omega_1}^\vee$. Ainsi, pour tout $j = 1, \dots, p-1$, les indices de Camacho-Sad des singularités x_j et $\sigma_{\omega_1}(x_j)$ sont égaux et rationnels : toutes les parties linéaires des singularités sont déterminées. De plus, nous avons l'égalité des germes $h_{1,1}^{(0)} = h_{1,1}^{(1)} = id$. En utilisant le lemme 3.2.4 dû à [Mat₃], nous montrons d'une part que les germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, x_1)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(x_1))}$ sont analytiquement conjugués et d'autre part, les indices de Camacho-Sad étant rationnels, que ces deux germes de feuilletage possèdent une intégrale première holomorphe. Les difféomorphismes d'holonomie $h_{1,2}$ et $g_{1,2}$ sont donc, eux aussi, analytiquement conjugués et analytiquement linéarisables. Le diviseur D_2 ne portant que deux points singuliers du feuilletage, les difféomorphismes d'holonomies $h_{2,2}$ et $g_{2,2}$ sont aussi analytiquement conjugués et analytiquement linéarisables. En raisonnant de proche en proche on montre, pour tout $j = 1, \dots, p-1$, que les germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, x_j)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(x_j))}$ possèdent une intégrale première holomorphe et sont analytiquement conjugués.

Conjugaisons des germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_2^{(0)})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_2^{(1)})}$.

Au niveau des composantes $P^{(i)}$, le calcul de l'indice de Camacho-Sad des singularités $s_2^{(0)}$ et $s_2^{(1)}$ montre que ces deux singularités ont même valeur propre. Ainsi, lorsque $s_2^{(0)}$ est une singularité de type noeud, ces deux singularités ont même forme normale analytique linéaire. Les germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_2^{(0)})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_2^{(1)})}$ sont donc analytiquement conjugués. D'autre part, lorsque $s_2^{(0)}$ est une singularité de type non-noeud, la conjugaison des germes d'holonomies $h_2^{(0)}$ et $h_2^{(1)}$ s'étend (lemme 3.2.4, [Mat₃], lemme 3.2.5, [Mez₂] ou lemme Martinet-Ramis, [Mar-Ram₁]) en une conjugaison des germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_2^{(0)})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_2^{(1)})}$.

La vérification de la SL-équivalence des feuilletages $(\mathcal{F}_{\omega_0}, id, id, [\Gamma_{\omega_0, D}])$ et $(\mathcal{F}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}, [\Gamma_{\omega_1, D}])$ marqués par \mathcal{F}_{ω_0} est alors immédiate. ■

Lemme 4.2.2 *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de \mathcal{P} espèce, pré-simples, de même type A_{2n-1} , E_7 ou D . La donnée, sur chacun des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} , d'un marquage par \mathcal{F}_{ω_0} , pour lesquels ces feuilletages marqués sont SL-équivalents correspond à la donnée :*

1. *D'une bijection⁵⁴ $\sigma : \{s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}\} \rightarrow \{s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}\}$ telle que les points $s_j^{(0)}$ et $\sigma(s_j^{(0)})$ se trouvent sur des composantes irréductibles de même auto-intersection. Quitte à réindexer les singularités, on suppose que $\sigma(s_j^{(0)}) = s_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$.*
2. *Pour chaque $i = 0, 1$, d'un germe de transversale $(T^{(i)}, q^{(i)})$ à la composante $P^{(i)}$.*
3. *Pour chaque $i = 0, 1$, d'un système complet simple de lacets $(\gamma_j^{(i)}, q^{(i)})$ sur $P^{(i)} - \{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}\}$.*

⁵⁴Dans les cas D_{2n+1} et E_7 , la bijection est canonique, en effet deux de ces singularités sont des intersections de composante irréductible du diviseur d'auto-intersections distinctes. Cette hypothèse n'est pas nécessaire.

4. D'un germe de biholomorphisme $\Phi : (T^{(0)}, q^{(0)}) \rightarrow (T^{(1)}, q^{(1)})$ qui conjugue les germes de difféomorphisme $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$ où $h_j^{(i)}$ est le germe de difféomorphisme d'holonomie de la singularité $s_j^{(i)}$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_i}$ associé au lacet $\gamma_j^{(i)}$ calculé sur la transversale T^i , $i = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$.
5. De l'égalité des valeurs propres de la partie linéaire des champs de vecteurs associés aux germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_j^{(0)})$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_j^{(1)})$, $j = 1, 2, 3$.

Preuve. Nous nous permettons de subdiviser cette démonstration en petits paragraphes.

Notation.

L'égalité des arbres duaux $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee, \mathbb{A}_{\omega_1}^\vee$, leur structure, ainsi que l'hypothèse 1. induisent l'existence de deux uniques bijections $\sigma_{\omega_1} : \Sigma_{\omega_0} \rightarrow \Sigma_{\omega_1}$ et $\Lambda_{\omega_1} : \text{Comp}(D_{\omega_0}) \rightarrow \text{Comp}(D_{\omega_1})$ qui vérifient :

- Pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, la multiplicité, resp. l'auto-intersection, de D et de $\Lambda_{\omega_1}(D)$ sont égales.
- Pour tout $i = 1, 2, 3$, on a $\sigma_{\omega_1}(s_i^{(0)}) = \sigma(s_i^{(0)}) = s_i^{(1)}$.
- Pour tout $D \in \text{Comp}(D_{\omega_0})$, tout $c \in D \cap \Sigma_{\omega_0}$, on a $\sigma_{\omega_1}(c) \in \Lambda_{\omega_1}(D)$.

Remarquons que l'arbre dual $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee$ se compose d'un sommet de valence 3, $P^{(0)}$, et d'une "branche morte" (dans le cas A_{2n-1}) ou d'une "branche morte" et d'une branche "p-morte" (dans le cas D , resp. E_7) que nous notons indifféremment B_1, B_2 . Nous ne différencions plus, par la suite, la branche p-morte et la branche morte. Considérons l'une d'elle, B_i . Nous indexons les diviseurs et les singularités de la manière suivante :

FIG. 22 – Lorsque le feuilletage est de type A_{2n-1} .

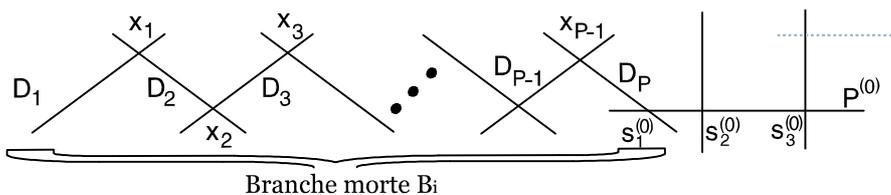
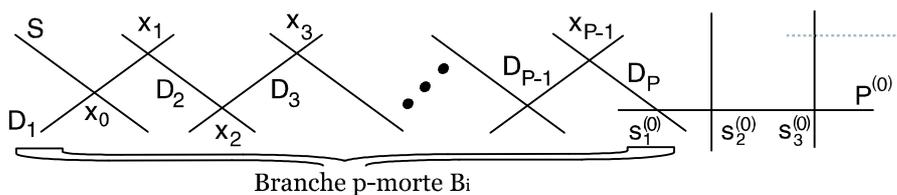


FIG. 23 – Lorsque le feuilletage est de type D, E_7 .



Pour chaque $j = 1, \dots, p-1$, nous notons $h_{j,l}$, resp. $g_{j,l}$, l'holonomie de la singularité x_j , resp. $\sigma_{\omega_1}(x_j)$, le long du diviseur D_l , resp. $\Lambda_{\omega_1}(D_l)$, de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, resp. de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$ avec $l = j, j+1$. Sur chaque composante irréductible D du diviseur D_{ω_i} , $i = 1, 2$, on se fixe un système complet simple de lacets $\gamma_k^{(i)}$ tel que l'holonomie associée au lacet $\gamma_k^{(i)}$ soit l'un des difféomorphismes $h_{j,l}$, $g_{j,l}$, $h_j^{(0)}$ ou $h_j^{(1)}$ précédents. On note $[\Gamma_{\omega_i, D}]$ la classe de ce système.

Indice de Camacho-Sad des singularités.

Remarquons tout d'abord que les feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} , resp. \mathcal{F}_{ω_1} , étant de 2^o espèce, les points singuliers du diviseur ne sont pas, par définition, des points singuliers de type noeud-col du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$, resp. $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1}$. De plus, on connaît les valeurs propres de la singularité $s_1^{(0)}$ ainsi que l'auto-intersection de la composante D_p (composante de valence 2), la formule de l'indice⁵⁵ nous permet de calculer l'indice de Camacho-Sad de la singularité x_{p-1} . Par itération de ce raisonnement, on obtient l'indice de Camacho-Sad de chaque singularité x_j , $j = 0, \dots, p-1$. En remarquant, d'une part l'égalité des valeurs propres des singularités $s_1^{(0)}$ et $s_1^{(1)}$ et d'autre part l'égalité des arbres duaux $\mathbb{A}_{\omega_0}^\vee$ et $\mathbb{A}_{\omega_1}^\vee$, on conclut que les indices de Camacho-Sad et les valeurs propres des singularités x_j et $\sigma_{\omega_1}(x_j)$ sont aussi égaux, $j = 0, \dots, p-1$.

Conjugaison des germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, z})}$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1, \sigma_{\omega_1}(z)})}$, $z \in \Sigma_{\omega_0}$.

Tout d'abord, pour $j = 1, 2, 3$, observons l'égalité des valeurs propres des singularités $s_j^{(0)}$ et $s_j^{(1)}$ ainsi que la conjugaison analytique de leur holonomie $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$. Deux cas se présentent :

la singularité c est de type noeud. Les indices de Camacho-Sad de c et $\sigma_{\omega_1}(c)$ étant égaux, ces deux singularités possèdent la même forme normale analytique linéaire.

La singularité c est de type non-noeud. La conjugaison des germes d'holonomies $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$ s'étend (par le lemme 3.2.4, [Mat₃], lemme 3.2.5, [Mez₂] ou lemme Martinet-Ramis, [Mar-Ram₁]) en une conjugaison des germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, s_2^{(0)}})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1, s_2^{(1)}})}$.

Ainsi, pour tout $j = 1, 2, 3$, les germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, s_j^{(0)}})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1, s_j^{(1)}})}$ sont analytiquement conjugués. Plaçons nous maintenant sur la "branche morte" B_i et montrons, pour chaque $j = 1, \dots, p-1$, que les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, x_j})}$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1, \sigma_{\omega_0}(x_j)})}$) sont analytiquement conjugués. Considérons la composante irréductible D_j de la "branche morte" B_i . Supposons qu'il existe un biholomorphisme $\phi_j : (\mathcal{M}_{\omega_0, x_j}) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1, \sigma_{\omega_1}(x_j)})$ tel que $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0, x_j})} = \phi_j^*(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1, \sigma_{\omega_1}(x_j)})}$), alors les holonomies $h_{j,j}$ et $g_{j,j}$ sont holomorphiquement conjuguées. La composante D_j étant de valence 2, les holonomies $h_{j-1,j}$ et $g_{j-1,j}$ sont aussi conjuguées. Les valeurs propres des singularités x_j et $\sigma_{\omega_1}(x_j)$ étant égales, il existe (toujours en utilisant le lemme 3.2.4, [Mat₃], ou le lemme 3.2.5, [Mez₂] ou le lemme Martinet-Ramis, [Mar-Ram₁]) un germe de

⁵⁵La formule de l'indice de Camacho-Sad [Cam-Sad].

biholomorphisme $\phi_{j-1} : (\mathcal{M}_{\omega_0}, x_{j-1}) \rightarrow (\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(x_{j-1}))$ qui conjugue les germes de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, x_{j-1})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(x_{j-1}))}$. Ainsi la conjugaison analytique des germes de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_j^{(0)})}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_j^{(1)})}$ induit, par ce raisonnement, pour chaque $j = 1, \dots, p-1$, que les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, x_j)}$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}(x_j))})$ sont analytiquement conjugués

La vérification de la SL-équivalence des feuilletages $(\mathcal{F}_{\omega_0}, id, id, [\Gamma_{\omega_0}, D])$ et $(\mathcal{F}_{\omega_1}, \Lambda_{\omega_1}, \sigma_{\omega_1}, [\Gamma_{\omega_1}, D])$ marqués par \mathcal{F}_{ω_0} est alors immédiate. ■

4.3 Résultats sur les feuilletages pré-simples.

Considérons un germe de feuilletage holomorphe \mathcal{F}_ω de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine. Fixons $\mathcal{U} = (\mathcal{M}_\omega, U_i)_{i \in \text{Comp}(D_\omega) \cup \Sigma_\omega}$ un recouvrement adapté du germe de variété $(\mathcal{M}_\omega, D_\omega)$. Notons $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$, resp. $\mathcal{X}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$, le faisceau de base D_ω des germes, aux points de D_ω , des champs de vecteurs holomorphes tangents au diviseur dont le flot laisse invariant le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$, resp. des champs tangents au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$. Considérons le faisceau quotient $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$ donné par la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{X}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \rightarrow \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \rightarrow 0$$

Nous notons $\tau(\omega)$ la dimension complexe de $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega})$.

Définition 4.3.1 *Le germe de feuilletage \mathcal{F}_ω est dit simple si les entiers $\tau(\omega)$ et $\delta(\omega)$ sont tous deux nuls.*

Nous dirons qu'un germe de feuilletage est SL-stable si tout germe de déformation SL-équisingulière d'espace de paramètres quelconque $(\mathbb{C}^p, 0)$ de \mathcal{F}_ω est localement analytiquement trivial. On a le résultat, dû à Mattei-Salem dans [Mat-Sal₁], suivant :

Théorème 4.3.2 *Un germe de feuilletage holomorphe \mathcal{F}_ω de $(\mathbb{C}^2, 0)$ singulier à l'origine, non dicritique, est SL-stable si, et seulement si, il est simple.*

En utilisant le critère de calcul de la dimension de $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega})$ donné par J.F.Mattei et E.Salem dans [Mat-Sal₁], J.F.Mattei montre que tout germe de feuilletage de 2^o espèce pré-simple est simple. En adaptant le *Théorème B* à ce cadre, on obtient immédiatement les lemmes :

Lemme 4.3.3 *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux germes de feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$, de 2^o espèce, simples, de type A, E, qui sont marqués par \mathcal{F}_{ω_0} . S'ils sont SL-équivalents alors ils sont faiblement SL-reliés.*

Lemme 4.3.4 *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux germes de feuilletages holomorphes de $(\mathbb{C}^2, 0)$, de 2^o espèce générale, simples, de type D, qui sont marqués par \mathcal{F}_{ω_0} . S'ils sont SL-équivalents alors ils sont faiblement SL-reliés.*

Nous avons les deux théorèmes suivants, l'un concerne les feuilletages de type A,E et l'autre les feuilletages de type D :

Théorème 4.3.5 *Soit \mathcal{F}_{ω_i} , $i = 0, 1$, un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2^o espèce pré-simple, de type A,E, de même type d'Arnol'd à l'origine. Si il existe un marquage par \mathcal{F}_{ω_0} des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} pour lequel ces feuilletages marqués sont SL-équivalents alors \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont analytiquement conjugués.*

Théorème 4.3.6 *Soit \mathcal{F}_{ω_i} , $i = 0, 1$, un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2° espèce générale, pré-simple, de type D , de même type d'Arnol'd à l'origine. Si il existe un marquage par \mathcal{F}_{ω_0} des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} pour lequel ces feuilletages marqués sont SL -équivalents alors \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont analytiquement conjugués.*

Ces deux théorèmes se démontrent de la même manière :

Preuve. Nous savons que tout germe de feuilletage de 2° espèce pré-simple est simple, de plus [lemme 4.2.1, resp. lemme 4.2.2] les feuilletages marqués par \mathcal{F}_{ω_0} , que nous notons $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}^{\mathcal{M}}$ sont faiblement SL -reliés : Il existe une collection de feuilletages $(\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^{\mathcal{M}})_{i \in \{0, \dots, n\}}$ marqués par \mathcal{F}_{ω_0} tels que pour tout $i = 0, \dots, n-1$, les feuilletages marqués $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_{i+1}}^{\mathcal{M}}$ sont reliés par un germe de déformation SL -équisingulier, $\mathcal{F}_{\eta_i}^{\mathcal{M}}$, de paramètres $P = (\mathbb{C}, [0, 1])$, marqués par \mathcal{F}_{ω_0} . Fixons \mathcal{F}_{η_i} , $i = 0, \dots, n-1$, l'une de ces déformations : En appliquant le théorème 4.3.2, en chaque point x de $[0, 1]$, nous obtenons l'existence d'un recouvrement $(U_x)_{x \in [0, 1]}$ ouverts de $[0, 1]$ tel que la déformation \mathcal{F}_{η_i} est analytiquement triviale le long de chacun des ouverts (\mathbb{C}, U_x) . Par compacité de $[0, 1]$, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini, "ordonné", d'ouverts $(U_j)_{j=0, \dots, k}$ ne possédant pas d'intersection trois à trois. "Par distributivité de la conjugaison holomorphe", les feuilletages marqués par \mathcal{F}_{ω_0} , $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_i}^{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{F}_{\tilde{\omega}_{i+1}}^{\mathcal{M}}$, sont analytiquement conjugués par un biholomorphisme respectant le marquage, $i = 0, \dots, n-1$. La conclusion s'en suit. ■

En utilisant les notations des lemmes 4.2.1 et 4.2.2, nous résumons ces résultats dans le :

Corollaire 4.3.7 *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de 2° espèce, pré-simples.*

1. *Supposons ces deux feuilletages de même type A_{2n} , ou E_6 , ou E_8 . Alors ils sont analytiquement conjugués si, et seulement si, il existe un germe de biholomorphisme $\Phi : (T^{(0)}, q^{(0)}) \rightarrow (T^{(1)}, q^{(1)})$ qui conjugue les germes de difféomorphisme d'holonomie $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$.*
2. *Supposons ces deux feuilletages de même type A_{2n-1} , ou E_7 , ou de 2° espèce générale de type D . Alors ils sont analytiquement conjugués si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (a) *Il existe un germe de biholomorphisme $\Phi : (T^{(0)}, q^{(0)}) \rightarrow (T^{(1)}, q^{(1)})$ qui conjugue les germes de difféomorphisme d'holonomie $h_j^{(0)}$ et $h_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$;*
- (b) *Les valeurs propres de la partie linéaire des champs de vecteurs associés aux germes de feuilletages réduits aux points $s_j^{(0)}$ et $s_j^{(1)}$ sont égaux, $j = 1, 2, 3$.*

4.4 Application aux singularités nilpotentes.

Un germe de feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$, \mathcal{F}_ω , défini par un germe de 1-forme ω de 1-jet non nul est appelé singularité nilpotente par de nombreux auteurs Berthier, Cerveau, Moussu, Méziani lorsque la partie linéaire du champ associé est du type $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La forme normale formelle d'une telle 1-forme

est du type $\omega_{n,p,\alpha} = d(y^2 + x^3) + \alpha x^p(1 + xV(x))$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $V \in \mathbb{C}[[x]]$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Elle définit un feuilletage de 2^o espèce lorsque $n \neq 2p$ et $n = 2p$, $\alpha \notin \left\{ \pm 2(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}), r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1] \right\}$. Le calcul de la réduction à partir de la forme normale montre que ce type de feuilletage est de type *A* et ne possède pas de singularité réduite de type noeud dans son feuilletage réduit par éclatements. Ces feuilletages correspondent à un cas étudié par divers auteurs ([Cer-Mou], [Mez₁], [Mez₂], [Ber-Mez-Sad]) et les problématiques rencontrées sont :

1. "L'holonomie de la séparatrice classe-t-elle le feuilletage?" (question de R. Thom) à laquelle Méziani donne une réponse négative.
2. "L'holonomie de l'unique composante irréductible du diviseur de valence 3 classe-t-elle le feuilletage?"
3. "Deux tels feuilletages formellement conjugués (resp. topologiquement conjugués) sont-ils analytiquement conjugués?"

En fait, la seconde problématique est incomplètement posée si l'on ne fixe pas un système de lacets générateurs du pseudo-groupe d'holonomie sur la composante de valence 3. Elle se reformule dans notre travail par :

- 2b. "Deux tels feuilletages SL-équivalents sont-ils holomorphiquement conjugués?"

Le théorème 4.3.5 répond à cette problématique, il redémontre⁵⁶ le résultat de Meziani [Mez₂] et l'étend à tous les feuilletages pré-simples de 2^o espèce de type *E*. Le théorème 4.3.6 étend quant à lui ce résultat aux feuilletages pré-simples de 2^o espèce générale de type *D*.

La troisième problématique demande quelques lignes de plus pour y répondre :

Théorème 4.4.1 *Soient \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} deux germes de feuilletages singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ pré-simples, de 2^o espèce de type *A, E*, resp. de 2^o espèce générale de type *D*, tels que le groupe d'holonomie de l'unique composante de valence 3 est rigide. Si les germes de feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont formellement conjugués alors ils le sont analytiquement.*

Preuve. En utilisant les notations du paragraphe 4.2, la conjugaison formelle induit :

- L'égalité des arbres duaux pondérés $\mathbb{A}_{\omega_0}^{\vee} = \mathbb{A}_{\omega_1}^{\vee}$.
- L'existence des deux uniques bijections

$$\sigma_{\omega_1} : \Sigma_{\omega_0} \rightarrow \Sigma_{\omega_1}$$

et

$$\Lambda_{\omega_1} : \text{Comp}(D_{\omega_0}) \rightarrow \text{Comp}(D_{\omega_1}).$$

- L'égalité des valeurs propres des singularités c et $\sigma_{\omega_1}(c)$, $c \in \Sigma_{\omega_0}$.

⁵⁶ En effet, Meziani travaille à type formel fixé, nous avons ici des hypothèses "plus faibles" :

1. Les équations formelles des séparatrices des feuilletages \mathcal{F}_{ω_0} et \mathcal{F}_{ω_1} sont formellement conjuguées.
2. De l'égalité des valeurs propres de la partie linéaire des champs de vecteurs associés aux feuilletages $\hat{\mathcal{F}}_{\omega_0|(\mathcal{M}_{\omega_0}, s_j^{(0)})}$ et $\hat{\mathcal{F}}_{\omega_1|(\mathcal{M}_{\omega_1}, s_j^{(1)})}$.

- L'existence d'un germe de difféomorphisme formel $\hat{\phi} : T^0 \rightarrow T^1$ qui conjugue les générateurs de l'holonomie i.e. $\hat{\phi} \circ h_j^{(0)} \circ \hat{\phi}^{-1} = h_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$.

Par rigidité du groupe d'holonomie, le difféomorphisme $\hat{\phi}$ est convergent. Nous sommes alors dans les hypothèses du lemme 4.2.1 lorsque le feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} est de type A_{2n} ou E , resp. du lemme 4.2.2 lorsque le feuilletage \mathcal{F}_{ω_0} est de type A_{2n-1} ou D . Aux théorèmes 4.3.5 et 4.3.6 de conclure. ■

Section 4.4. : Application aux singularités nilpotentes.

...

5 Appendice

Dans un premier temps, nous nous intéressons, à décrire l'existence du groupe des automorphismes d'un chapelet de sphères. Nous éclaircissons le lien entre les difféomorphismes de recollement des sphères d'un chapelet fixé et l'existence d'automorphismes de ce chapelet.

Dans un deuxième temps, nous démontrons une petite propriété concernant les difféomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Fixons h un difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$. Nous montrons que si un autre difféomorphisme f de $(\mathbb{C}, 0)$ envoie chaque orbite de h sur elle-même, alors f est une puissance relative de h , i.e. $f = h^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.1 Morphismes et automorphismes de chapelets de sphères.

Dans cette section, nous sommes amenés à étudier les chapelets de sphères et plus précisément les morphismes entre ces espaces. Nous gardons à l'esprit qu'un chapelet de sphères est la représentation géométrique des espaces d'orbites des difféomorphismes résonnants (non linéarisables). Nous considérons les morphismes entre chapelets qui sont compatibles avec cette structure sous-jacente.

Pour des raisons de cohérence, nous notons $\tilde{\mathbb{Z}}_{2k} = \{1, \dots, 2k\}$, resp. $\tilde{\mathbb{Z}}_k = \{1, \dots, k\}$, le groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_{2k} = \{0, \dots, 2k - 1\}$, resp. $\mathbb{Z}_k = \{0, \dots, k - 1\}$, où $2k$, resp. k , et 0 sont identifiés.

Définition 5.1.1 Notons $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, k)$ un triplet composé :

1. D'un entier k non nul.
2. D'une famille $\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ de variétés doublement pointées, qui sont chacune biholomorphe à $(\mathbb{C}, 0, \infty)$.
3. D'une famille $\mathcal{H} = (h_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ de germes d'applications holomorphes vérifiant :

- (a) $h_{2j} : (V_{2j}, 0_{2j}) \rightarrow (V_{2j+1}, 0_{2j+1})$, $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_k$,
- (b) $h_{2j+1} : (V_{2j+1}, \infty_{2j+1}) \rightarrow (V_{2j+2}, \infty_{2j+2})$, $j \in \mathbb{Z}_k$.

Définition 5.1.2 Nous appelons système de coordonnées sur le chapelet de sphères $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, k)$ la donnée de biholomorphismes $(z_j, Z_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ vérifiant les relations :

1. $z_j : (V_j - \infty_j, 0_j) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$,
 $Z_j : (V_j - 0_j, \infty_j) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$.
2. $z_j = \frac{1}{Z_j}$.

La donnée d'un système de coordonnées équivaut à la donnée, pour chaque j , d'un biholomorphisme entre $(V_j, 0_j, \infty_j)$ et $(\mathbb{C}, 0, \infty)$. Ainsi lorsque $(z_j, Z_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ et $(\tilde{z}_j, \tilde{Z}_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sont deux systèmes de coordonnées sur le chapelet $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, k)$, pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_j = \alpha_j \tilde{z}_j$ (et de fait $\tilde{Z}_j = \alpha_j Z_j$). On en déduit que le nombre

$$\lambda = \prod_{j=0}^{k-1} (z_{2j+1} \circ h_{2j} \circ z_{2j}^{-1})'(0) / (Z_{2j+2} \circ h_{2j+1} \circ Z_{2j+1}^{-1})'(0)$$

est indépendant du système de coordonnées choisies. Ce nombre est appelé spectre du chapelet. On voit facilement qu'il existe un système de coordonnées qui vérifie :

1. Pour tout $j \in \mathbb{Z}_{2k}$, $j \neq 0$, on a $(Z_{2j+2} \circ h_{2j+1} \circ Z_{2j+1}^{-1})'(0) = 1$ et $(z_{2j+1} \circ h_{2j} \circ z_{2j}^{-1})'(0) = 1$.
2. Pour $j = 2k$ on a $(z_1 \circ h_{2k} \circ z_{2k}^{-1})'(0) = \lambda$.

Nous appellerons un tel système, système de coordonnées normales sur le chapelet $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, k)$.

Définition 5.1.3 Nous dirons qu'un chapelet est trivial si les applications h_j sont linéaires, dans ce cas il existe un système de coordonnées normales telles que $(z_{2j+1} \circ h_{2j} \circ z_{2j}^{-1}) = id$ et $(Z_{2j+2} \circ h_{2j+1} \circ Z_{2j+1}^{-1}) = id$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_{2k}$, $j \neq 0$ et telles que $(z_1 \circ h_{2k} \circ z_{2k}^{-1})(z) = \lambda z$, où z est la coordonnée sur \mathbb{C} .

5.1.1 Morphismes entre chapelets de sphères.

Définition 5.1.4 Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j), k)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$ et $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{V}} = (\tilde{V}_j, \tilde{0}_j, \tilde{\infty}_j), \mathcal{G} = (g_j), l)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$ deux chapelets de sphères :

1. Si $\frac{k}{l}$ est un entier, un morphisme entre les chapelets \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ est la donnée d'un $p \in \mathbb{Z}_{2l}$ et d'une famille $\psi_j : V_j \rightarrow \tilde{V}_{j+2p}$, $j \in \mathbb{Z}_{2k}$, d'applications holomorphes telles que :
 - L'ensemble des points critiques est inclus dans $\{0_j, \infty_j\}$,
 - On a égalité $\psi_j^{-1}(0_{j+2p}) = 0_j$ et $\psi_j^{-1}(\tilde{\infty}_{j+2p}) = \infty_j$ et
 - La relation (R1) est vérifiée :

$$(R1) : \psi_{j+1} \circ h_j = g_{j+2p} \circ \psi_j$$

On note ce morphisme $\Psi = (\psi_j, p)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$, la collection des ψ_j peut-être considérée comme une application de l'union disjointe des V_j dans l'union disjointe des \tilde{V}_j . On appelle indice du morphisme Ψ l'entier p et on note $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} sur $\tilde{\mathcal{C}}$.

2. Si $\frac{k}{l} \notin \mathbb{N}^*$, on pose $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}) = \emptyset$.

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que les chapelets \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont distincts et que $\frac{k}{l} \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 5.1.5 Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j), k)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$, $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{V}} = (\tilde{V}_j, \tilde{0}_j, \tilde{\infty}_j), \mathcal{G} = (g_j), l)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$ deux chapelets de sphères et $\Psi = (\psi_j, p)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$ un élément de $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$.

1. Dans tout système de coordonnées $(z_j, Z_j)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$ sur \mathcal{C} et $(\tilde{z}_j, \tilde{Z}_j)_{j \in \mathbb{Z}_{2k}}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$, Ψ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{j+2p} \circ \psi_j &= \beta_j z_j^q \\ \tilde{Z}_{j+2p} \circ \psi_j &= \beta_j^{-1} Z_j^q, \end{aligned}$$

où $\beta_j \in \mathbb{C}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{Z}_{2k}$ et q est indépendant de j .

2. Si les deux systèmes sont normaux $\beta_j = \beta_{j+1}$.
3. De plus, il existe des systèmes de coordonnées normales sur \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ tel que pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, $\beta_j = 1$.

Preuve. Notons (z, Z) le système de coordonnées canoniques sur $\bar{\mathcal{C}}$, nous démontrons cette proposition, assertion par assertion :

Assertion 1.

L'application $\phi_j : (\bar{\mathcal{C}}, 0, \infty) \rightarrow (\bar{\mathcal{C}}, 0, \infty)$ définie

$$\text{sur } \bar{\mathcal{C}} - \infty \text{ par } \tilde{z}_{j+2p} \circ \psi_j \circ z_j^{-1}$$

et

$$\text{sur } \bar{\mathcal{C}} - 0 \text{ par } \tilde{Z}_{j+2p} \circ \psi_j \circ Z_j^{-1}$$

est une application holomorphe fixant 0 et ∞ . Elle est du type $z \rightarrow \beta_j z^{q_j}$ et $Z \rightarrow \beta_j^{-1} Z^{q_j}$ avec $\beta_j \in \mathbb{C}^*$ et $q_j \in \mathbb{N}^*$. Ainsi pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$,

$$\tilde{z}_{j+2p} \circ \psi_j = \beta_j z_j^{q_j} \text{ et } \tilde{Z}_{j+2p} \circ \psi_j = \beta_j^{-1} Z_j^{q_j}.$$

Par identification des premiers termes de l'égalité (R1), on obtient l'égalité (R2) :

$$\begin{aligned} \beta_{j+1} (h'_j(0_j))^{q_{j+1}} z_j^{q_{j+1}} &= \beta_j (g'_{j+2p}(\tilde{0}_{j+2p})) z_j^{q_j} \text{ si } j \text{ est pair.} \\ \beta_{j+1}^{-1} (h'_j(\infty_j))^{q_{j+1}} Z_j^{q_{j+1}} &= \beta_j^{-1} (g'_{j+2p}(\tilde{\infty}_{j+2p})) Z_j^{q_j} \text{ si } j \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Cela implique $q_j = q_{j+1}$ pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$.

Assertion 2.

Dans les coordonnées normales, pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, $j \neq 2k$, on a :

$$h'_j(0_j) = g'_j(\tilde{0}_j) = 1 \text{ si } j \text{ est pair}$$

et

$$h'_j(\infty_j) = g'_j(\tilde{\infty}_j) = 1 \text{ si } j \text{ est impair.}$$

Ainsi la relation (R2) se résume pour tout $j \neq 2k$ à

$$\beta_{j+1} z_j^q = \beta_j z_j^q \text{ et } \beta_{j+1}^{-1} Z_j^q = \beta_j^{-1} Z_j^q.$$

D'où l'égalité $\beta_{j+1} = \beta_j$, pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, $j \neq 2k$.

Assertion 3.

Fixons un système de coordonnées normales $(z_j, Z_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sur \mathcal{C} et $(\tilde{z}_j, \tilde{Z}_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$, on a les égalités :

$$\tilde{z}_{j+2p} \circ \psi_j = \beta z_j^q \text{ et } \tilde{Z}_{j+2p} \circ \psi_j = \beta^{-1} Z_j^q.$$

En effectuant le changement de coordonnées $z'_j = \alpha z_j$ et $Z'_j = \alpha^{-1} Z_j$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha^q = \beta^{-1}$, on obtient directement l'assertion 3. ■

Définition 5.1.6 Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j, k)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}})$ et $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{V}} = (\tilde{V}_j, \tilde{0}_j, \tilde{\infty}_j), \mathcal{G} = (g_j, l)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2l}})$ deux chapelets de sphères et $\Psi = (\psi_j, p)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un élément de $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$. Nous appelons degrés partiel de Ψ , noté $d_p^\circ(\Psi)$ le degrés commun des ψ_j . On a $d_p^\circ(\Psi) = l \times k^{-1} \times \#\psi_1^{-1}(x)$, où $x \in \tilde{V}_{1+2p} - \{\tilde{0}_j, \tilde{\infty}_j\}$. Le degré partiel du morphisme Ψ ne dépend pas du point x choisi et de plus pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, tout $y_{j+2p} \in \tilde{V}_{j+2p}$, on a égalité $\#\psi_1^{-1}(x) = \#\psi_j^{-1}(y_{j+2p})$. Il suffit de considérer des coordonnées sur \mathcal{C} et sur $\tilde{\mathcal{C}}$ pour s'apercevoir que le degré partiel de Ψ n'est autre que l'entier q de la proposition 5.1.5.

Proposition 5.1.7 Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j, k)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}})$ et $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{V}} = (\tilde{V}_j, \tilde{0}_j, \tilde{\infty}_j), \mathcal{G} = (g_j, l)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2l}})$ deux chapelets de sphères de spectre respectif λ et $\tilde{\lambda}$, nous avons les assertions suivantes :

1. Si $\frac{k}{l} = 1$ et si tous les éléments de $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$ sont d'indice nul alors $\tilde{\lambda} = \lambda^q$.
2. Si $\frac{k}{l} \neq 1$ ou si $\frac{k}{l} = 1$ et il existe un élément de $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$ d'indice non nul alors $\tilde{\lambda} = \lambda^q = 1$.

Preuve. Fixons un système de coordonnées normales $(z_j, Z_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sur \mathcal{C} et $(\tilde{z}_j, \tilde{Z}_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$ et notons Ψ un élément de $\text{Morph}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$. D'après la relation (R2), il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que nous avons les égalités suivantes :

$$\beta (h'_{2k} (0_{2k}))^q z_{2k}^q = \beta (g'_{2k+2p} (\tilde{0}_{2k+2p})) z_{2k}^q$$

et

$$\beta (h'_{2l-2p} (0_{2l-2p}))^q z_{2l-2k}^q = \beta (g'_{2l} (\tilde{0}_{2l})) z_{2l}^q.$$

Deux cas se présentent :

Cas de l'assertion 1 :

Dans ce cas ces deux égalités n'en sont qu'une :

$$\beta (h'_{2k} (0_{2k}))^q z_{2k}^q = \beta (g'_{2l} (\tilde{0}_{2l})) z_{2l}^q \text{ avec } k = l,$$

ainsi

$$\tilde{\lambda} = g'_{2l} (\tilde{0}_{2l}) = (h'_{2k} (0_{2k}))^q = \lambda^q.$$

Cas de l'assertion 2 :

– Supposons $k \neq l$,

Alors on est dans le cadre où

$$\psi_{2k} : V_{2k} \rightarrow \tilde{V}_{2k+2p} \text{ et } \psi_{2l} : V_{2l} \rightarrow \tilde{V}_{2k+2p},$$

ainsi

$$\lambda^q = (h'_{2k} (0_{2k}))^q = (h'_{2l} (0_{2l}))^q = 1.$$

De même on est dans le cadre où

$$\psi_{2l-2k} : V_{2l-2k} \rightarrow \tilde{V}_{2l} \text{ et } \psi_{4l-2k} : V_{4l-2k} \rightarrow \tilde{V}_{2l},$$

on a

$$\tilde{\lambda} = 1.$$

– Supposons $k = l$,

On peut supposer que Ψ est d'indice non nul, dans ces deux cas on a $2k + 2p \neq 0 [2l]$ et $2l - 2p \neq 0 [2k]$. Ainsi les équations deviennent :

$$\lambda^q = 1 \text{ et } \tilde{\lambda} = 1.$$

Ce qui termine cette preuve. ■

Proposition 5.1.8 *Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j, k)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un chapelet de sphères non trivial, alors tout endomorphisme de \mathcal{C} est un automorphisme.*

Cette proposition se démontre au moyen du lemme suivant :

Lemme 5.1.9 *Soit $h \neq id$ un germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ tangent à l'identité vérifiant $h(\beta z^q) = \beta (h(z))^q$, $\beta \in \mathbb{C}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ alors $q = 1$.*

Preuve. Notons $h(z) = z(1 + a_{i_0} z^{i_0} + \dots)$ le développement en série entière de h . En comparant le degré des premiers termes de l'égalité

$$h(\beta z^q) - \beta z^q = \beta (h(z))^q - \beta z^q,$$

nous constatons que $q + q \times i_0 = q + i_0$, ce qui ne se réalise que si $q = 1$. ■

Preuve de la proposition 5.1.8 : Soit Ψ un endomorphisme de \mathcal{C} d'indice p . Notons $(z_j, Z_j)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un système de coordonnées sur le chapelet \mathcal{C} , nous avons deux cas :

1. $p = 0$.

D'après la proposition 5.1.5, pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, on a $z_j \circ \psi_j = \beta z_j^q$, la relation (R2) implique l'égalité $h_j(\beta z_j^q) = \beta (h_j(z_j))^q$ et donc [lemme 5.1.9] $q = 1$.

2. $p \neq 0$

De la même manière en utilisant la proposition 5.1.5 et la relation (R1) on obtient l'égalité $h_{j+2p}(\beta z_{j+2p}^q) = \beta (h_j(z_j))^q$. Par itération de cette égalité on obtient $h_{j+2p}(\beta^m z_{j+2p}^{mq}) = \beta^m (h_j(z_j))^{mq}$, où $mp \equiv 0 [2k]$, et donc [lemme 5.1.9] $q = 1$.

En d'autres termes Ψ est un automorphisme de \mathcal{C} . ■

5.1.2 Automorphismes de chapelets de sphères.

Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j, k)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un chapelet de sphères, non trivial, et étudions les automorphismes de cet espace. Notons $Aut_0(\mathcal{C})$ l'ensemble des automorphismes de \mathcal{C} d'indice 0.

Proposition 5.1.10 *Soit $\Psi = (\psi_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un automorphisme de \mathcal{C} d'indice p .*

- Si p est nul, alors pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, l'application $\psi_i : V_i \rightarrow V_i$ est une rotation rationnelle d'angle $\frac{l}{r} \in \mathbb{Q}$, $(l, r) = 1$.
- Si p est non nul, alors le spectre du chapelet est égal à 1 et l'itéré Ψ^m de Ψ est un automorphisme d'indice 0, où m est un entier vérifiant $mp \equiv 0 [2k]$.

On vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme 5.1.11 *Un germe d'application $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tangent à l'identité, différent de l'identité, réalise l'équation $\beta h(z) = h(\beta z)$ si, et seulement si, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que h est du type $h(z) = z(1 + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i (z^r)^i)$, $a_i \in \mathbb{C}$ et $\beta = e^{\frac{2i\pi l}{r}}$, $l \in \mathbb{Z}_r$.*

Preuve de la Proposition 5.1.10.

1. Examinons d'abord le cas où p est nul.

Fixons $(z_i, Z_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un système de coordonnées normales sur le chapelet \mathcal{C} . D'après la proposition 5.1.5, il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$ nous avons les égalités

$$z_i \circ \psi_i = \beta z_i \text{ et } Z_i \circ \psi_i = \beta^{-1} Z_i.$$

La relation (R1) implique alors

$$\beta(z_{i+1} \circ h_i \circ z_i^{-1})(z) = (z_{i+1} \circ h_i \circ z_i^{-1})(\beta z)$$

où z est la coordonnée canonique sur $\bar{\mathbb{C}}$. Ainsi d'après le lemme 5.1.11, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que h est du type

$$(z_{i+1} \circ h_i \circ z_i^{-1})(z) = z(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} a_{i,j} (z^r)^j),$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, $\beta = e^{\frac{2i\pi l}{r}}$ et $l \in \mathbb{Z}_r$. Considérons maintenant un autre système de coordonnées $(\tilde{z}_i, \tilde{Z}_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sur le chapelet \mathcal{C} . D'après la définition 5.1.2, pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ tel que $\tilde{z}_i = \alpha_i z_i$ et $\tilde{Z}_i = \alpha_i^{-1} Z_i$. Nous obtenons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\beta z} & \bar{\mathbb{C}} \\ & \alpha_i \swarrow & \uparrow z_i & & z_i \uparrow \searrow \alpha_i \\ \bar{\mathbb{C}} & \xleftarrow{\tilde{z}_i} & V_i & \xrightarrow{\psi_i} & V_i & \xrightarrow{\tilde{z}_i} & \bar{\mathbb{C}} \end{array}$$

où (z, Z) est la coordonnée canonique sur $\bar{\mathbb{C}}$. Ainsi

$$\tilde{z}_i \circ \psi_i \circ \tilde{z}_i^{-1} = \alpha_i (z_i \circ \psi_i \circ z_i^{-1}) \alpha_i^{-1} = \beta z.$$

Il est également clair que le développement en série de h_i dans les coordonnées $(\tilde{z}_i, \tilde{Z}_i)$ est du type

$$(\tilde{z}_{i+1} \circ h_i \circ \tilde{z}_i^{-1})(z) = z(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} b_{i,j} (z^r)^j), \quad b_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

2. Considérons maintenant le cas où p est non nul.

La seule chose à démontrer concerne le spectre du chapelet : pour cela considérons $(z_i, Z_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ un système de coordonnées sur le chapelet \mathcal{C} , la relation (R1) appliquée à Ψ implique alors

$$\beta(z_1 \circ h_{2k} \circ z_{2k}^{-1})(z) = (z_{2p+1} \circ h_{2p} \circ z_{2p}^{-1})(\beta z).$$

En dérivant, en 0, cette égalité on obtient $\beta\lambda = \beta$, où λ est le spectre du chapelet.

Ce qui achève cette démonstration. ■

Corollaire 5.1.12 *Pour tout système de coordonnées $(z_i, Z_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ sur le chapelet \mathcal{C} , nous avons les assertions suivantes :*

1. *Le sous groupe $\text{Aut}_0(\mathcal{C})$ n'est pas réduit à l'identité si, et seulement si, il existe $r \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tel que pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, h_i est du type*

$$z_{i+1} \circ h_i = \alpha_i z_i \left(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} a_{i,j} (z_i^r)^j \right), a_{i,j} \in \mathbb{C}, \alpha_i \in \mathbb{C}^*.$$

2. *L'ensemble des automorphismes d'indice non nul est non vide si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{Z}_{2k}$, $\beta \in \mathbb{C}^*$, tel que pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$, on a l'égalité*

$$\beta(z_{i+1} \circ h_i \circ z_i^{-1})(z) = (z_{2p+i+1} \circ h_{2p+i} \circ z_{2p+i}^{-1})(\beta z).$$

Proposition 5.1.13 *L'application d'indice $\text{Ind} : \text{Aut}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}_{2k}$ qui, à un morphisme, associe son indice est un morphisme de groupe ; ainsi il existe $p \in \mathbb{Z}_{2k}$ tel que son image est un sous groupe de \mathbb{Z}_{2k} engendré par p , noté $p\mathbb{Z}_{2k}$. On a alors la suite exacte de groupe :*

$$0 \rightarrow \text{Aut}_0(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}) \rightarrow p\mathbb{Z}_{2k} \rightarrow 0$$

La démonstration de cette proposition est classique.

Proposition 5.1.14 (Automorphismes de chapelets triviaux) *Considérons $\mathcal{C} = (\mathcal{V} = (V_j, 0_j, \infty_j), \mathcal{H} = (h_j, k)_{j \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}})$ un chapelet trivial, les automorphismes de \mathcal{C} dépendent du spectre du chapelet, λ , ainsi :*

1. *Si $\lambda = 1$, alors $\text{Aut}(\mathcal{C}) = \{\Psi = (\psi_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ d'indice $p \in \mathbb{Z}_{2k}$ tel que pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$ l'application $\psi_i : V_i \rightarrow V_i$ est une homothétie de rapport $\beta \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{Z}_{2k} \times \mathbb{C}^*$.*
2. *Si $\lambda \neq 1$ alors $\text{Aut}(\mathcal{C}) = \{\Psi = (\psi_i)_{i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}}$ d'indice 0 tel que pour tout $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k}$ l'application $\psi_i : V_i \rightarrow V_i$ est une homothétie de rapport $\beta \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$.*

La preuve est laissée au lecteur, elle est triviale : il n'y a plus de condition induite par les applications h_i , $i \in \tilde{\mathbb{Z}}_{2k} - \{2k\}$, qui dans un bon système de coordonnées sont toutes l'identité.

5.2 Germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$.

Ce paragraphe permet de traiter spécifiquement les problèmes rencontrés dans ce travail concernant les germes de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$. Fixons h un germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ et supposons qu'il vérifie la condition :

$$(*) = \begin{cases} 1. |h'(0)| \neq 1 \\ \text{ou bien,} \\ 2. h'(0) = e^{2i\pi\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q} \\ \text{ou bien,} \\ 2. h'(0) = e^{2i\pi\alpha}, \alpha \notin \mathbb{Q}, \text{ et } h \text{ est linéarisable.} \end{cases}$$

Soit f un élément de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ et U un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C} , notons f_U le représentant de f sur U . On définit la U -orbite de f d'un point $z \in U$, $O_U^f(z)$ comme l'ensemble des points $\dots, z_{-m}, z_{-m+1}, \dots, z_0 = z, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots$ de U tels que z_{k+1} est l'image de z_k par l'application f .

Définition 5.2.1 Nous dirons que f est compatible avec h s'il existe des voisinages ouverts V et W 1-connexe de 0 dans \mathbb{C} , $W \subset V$, sur lesquels f et h admettent des représentants holomorphes tels que $h(W) \subset V$, $f(W) \subset V$ et tel que pour tout $z \in W$, on a $f(O_W^h(z)) \subset O_V^h(z)$.

Proposition 5.2.2 Soit f un élément de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ compatible avec h et supposons que h vérifie la condition $(*)$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f = h^n$.

Preuve. Soient V et W deux voisinages ouverts de l'origine satisfaisant les conditions de la définition 5.2.1. Tout d'abord nous recherchons un domaine "invariant" fermé $\Omega \subset W$ de h qui contient 0 , (i.e. $h(\Omega) \subset \Omega \ni 0$). Remarquons que tout domaine "invariant" de h est aussi un domaine invariant de f .

Si h est linéarisable, nous le supposons non dilatant (quitte à considérer son inverse), le domaine Ω recherché est alors, dans des coordonnées appropriées, un disque fermé centré en 0 inclus dans W .

Si h est résonnant, non linéarisable, il existe Ω un fermé 1-connexe de \mathbb{C} , contenant 0 dans son adhérence, saturé par les orbites de h , i.e. $h(\Omega) = \Omega$.

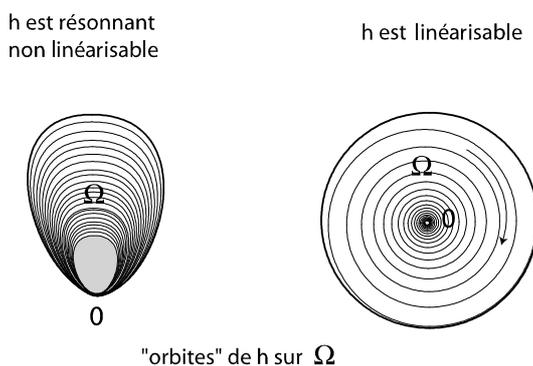


FIG. 24 – Representation du domaine Ω

Par hypothèse, pour chaque $z \in \Omega$, $f(z) \in O_\Omega^h(z)$, ainsi il existe $n_z \in \mathbb{Z}$, tel que $f_\Omega(z) = h_\Omega^{n_z}(z)$. L'application $n : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto n_z$ va d'un ensemble

continu dans un ensemble dénombrable, ainsi il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n^{-1}(p)$ est un ensemble infini non dénombrable de $\overset{\circ}{\Omega}$. De plus, pour tout $z \in \Omega$, $h^p(z)$ et $f(z)$ sont des points de Ω . L'application holomorphe $h^p - f$ admet une infinité non dénombrable de zéros sur le compact Ω , par le théorème des zéros isolés, on obtient l'égalité des représentants de h^p et f sur Ω et par suite l'égalité des germes $h^p \equiv f$. ■

Considérons f un élément de $Diff(\mathbb{C}, 0)$, nous dirons que f appartient au centralisateur de h , noté $f \in Cen(h)$, si f commute à h .

Dans [Mar-Ram₂], J. Martinet et J.P. Ramis associent à chaque difféomorphisme $h \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ résonnant, non linéarisable, une classe d'isomorphisme de chapelet de sphères $\mathcal{C}(h) = [\mathcal{C}_h]$ de manière que :

1. Si h_1 et h_2 sont formellement conjugués alors : h_1 et h_2 sont analytiquement conjugués si, et seulement si, $\mathcal{C}(h_1) = \mathcal{C}(h_2)$.
2. Pour chaque représentant $\mathcal{C}(h)$ de la classe $[\mathcal{C}_h]$ on a la suite exacte suivante

$$\langle h \rangle \rightarrow Cen(h) \rightarrow Aut(\mathcal{C}(h)) \rightarrow 0.$$

Pour une démonstration de l'assertion 2., le lecteur se référera au cours de F. Loray, [Lor₁], particulièrement au Chapitre I.10 "Les symétries du chapelet". On remarque tout de même que l'exactitude suivante $\langle h \rangle \rightarrow Cen(h) \rightarrow Aut(\mathcal{C}(h))$ est directement démontrée par la proposition 5.2.2.

6 Bibliographie

Références

- [Ahl] Ahlfors, L.V. : Lectures on quasiconformal mapping, Van Nostrand Compagny, Toronto-New York-London (1966).
- [Arn₁] Arnol'd, V.I. : Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities. Moscow State University translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. **6**, No. 4, 3-25 (1972).
- [Ber-Cer-Mez] Berthier, M., Cerveau, D., Meziani, R. : Transformations isotropes des germes de feuilletages holomorphes. Jour. Math. Pur. Appli., vol. **78**, issue 7, 701-722 (1999).
- [Ber-Mez-Sad] Berthier, M., Meziani, R., Sad, P. : On the classification of nilpotent singularities. Bull. Sci. math., vol. **123**, 351-370 (1999).
- [Bi] Birman, J. : Braids, Links and mapping class groups, Annals of Math. Studies **81**, Princeton Univ. Press, (1984).
- [Brj] Brjuno, A.D. : Analytical form of differential equations, Transactions Moscow Math. Soc. **25**, p. 131-288 (1971) ; **26**, p. 199-239 (1972).
- [Cam-Net-Sad] Camacho, C., Neto, A.L., Sad, P. : Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. J. Differential Geometry, vol. **20**, 143-174 (1984).
- [Cam-Sad] Camacho, C., Sad, P. : Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. Ann. of Mathematics, vol. **115**, 579-595, (1982).
- [Cam-Net] Camacho, C., Neto, A.L. : Geometric theory of foliations. Birkhäuser. Boston-Basel-Stuttgart (1985).
- [Cer] Cerveau, D. : Déploiements non dicritiques des formes différentielles holomorphes $A dx + B dy$. IRMAR.
- [Cer-Mou] Cerveau, D., Moussu, R. : Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $y dy + \dots = 0$. Bull. Soc. math. France, vol. **116**, 459-488 (1988).
- [Cha-Les] Chaluleau, B., Lescouzères, E. : On blowing up of Trolls in the DAOC plane. Journ. of Camelot, vol. **903**, 333-359, (902).
- [Dul] Dulac, H. : Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. J. Ecole Polytechnique, vol.2, sec. 9, 1-125 (1904).
- [Flo] Le Floch, L. : Rigidité générique des feuilletages singuliers. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., Ser. IV., t. **31**, 765-785 (1998).
- [Lor₁] Loray, F. : Singularité d'équations différentielles et feuilletages. Cours d'intégration et monographies du T.M.R. sing. ecu. diff. y foliaciones, num. 1, (1998).
- [Lor₂] Loray, F. : Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble. Thèse de l'université Rennes I (1994).

- [Mar] Marín Pérez, D. : Problemas de módulos para una clase de foliaciones holomorfas. Thèse de l'Universitat Autònoma de Barcelona (2000).
- [Mar-Ram₁] Martinet, J., Ramis, J.P. : Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. Publ. Math. I.H.E.S., vol. **55**, 63-164 (1982).
- [Mar-Ram₂] Martinet, J., Ramis, J.P. : Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., Ser. IV., t. **16**, 571-621 (1983).
- [Mat₁] Mattei, J.F. : Modules de feuilletages holomorphes singuliers : I-équisingularité. Inven. Math., vol. **103**, 297-325 (1991).
- [Mat₂] Mattei, J.F. : Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux. Astérisque, **261**, 253-276 (2000).
- [Mat₃] Mattei, J.F. : Extension de conjugaison transverse au voisinage de points singuliers de type selle. correspondance avec Ghys, E. (199.).
- [Mat-Mou] Mattei, J.F., Moussu, R. : Holonomie et intégrales premières. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., Ser. IV., t. **13**, 469-523 (1980).
- [Mat-Sal₁] Mattei, J.F., Salem, E. : Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of $(\mathbb{C}^2, 0)$. Math. Res. Lett., vol. **4**, 131-141 (1997).
- [Mat-Sal₂] Mattei, J.F., Salem, E. : Classification topologique et analytique des feuilletages génériques de $(\mathbb{C}^2, 0)$. C. R. Académie des Sciences, Paris, Serie 1, t. **352**, 773-778 (1997).
- [Mat-Sal₃] Classification formelle des feuilletages génériques de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Preprint.
- [Mez₁] Meziani, R. : Problèmes de modules pour des équations différentielles dégénérées de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Thèse de l'université Rennes I (1992).
- [Mez₂] Meziani, R. : Classification analytique d'équations différentielles $ydy + \dots = 0$ et espace de modules. Thèse d'Etat de l'université IBN Tofail (1998).
- [Net] Neto, A.L. : Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two. Jour. Diff. Geometry, t.**26**, 1-31 (1987).
- [Sei] Seidenberg, A. : Reduction of singularities of the differential equation $A dx = B dy$. American Jou. Math., vol. **90**, 249-269 (1968).
- [Siu] Siu, Y.T. : Every Stein subvarieties admits a Stein neighborhood. Inven. Math., vol. **30**, 89-100 (1976).

Au capitaine de ce navire,
A qui l'équipage rend grâce
d'avoir été conduit à bon port.

Merci chef.

⁵⁷Opo pink telo ymes.